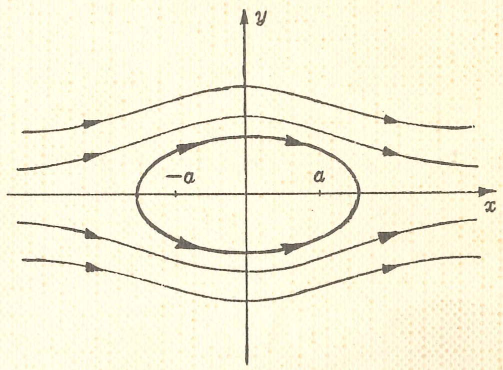
collana **SCHAUM**
teoria e problemi

FLUIDODINAMICA

W. F. HUGHES - J. A. BRIGHTON



100 esercizi risolti

ETAS LIBRI

collana **SCHAUM**
teoria e problemi

FLUIDODINAMICA

W.F. HUGHES - J.A. BRIGHTON

correnti subsoniche e supersoniche
moto turbolento incompressibile
moto di strato limite ipersonico
magnetoidrodinamica
fluidi non newtoniani

ETAS LIBRI

Titolo originale: Fluid Dynamics
Editore originale: McGraw-Hill Book Company, New York
Traduzione dall'inglese di Walter Molon

Copyright © 1967 McGraw-Hill, Inc.
Copyright © 1978 Gruppo Editoriale Fabbri, Bompiani, Sonzogno, Etas S.p.A.
I diritti di traduzione, di riproduzione e di adattamento totale o parziale e con qualsiasi mezzo (compresi i microfilm e le riproduzioni fotostatiche) sono riservati per tutti i paesi.
Prima edizione italiana: novembre 1978
3 4 5 6 7 8 9 0

Indice

V *Prefazione*

1 *Capitolo 1* – Introduzione

1.1 Che cos'è un fluido; 1.2 Il modello matematico; 1.3 Alcune definizioni; 1.4 Classificazioni fisiche. Tipi di moto

10 *Capitolo 2* – Statica dei fluidi

2.1 Pressione; 2.2 Equazioni differenziali della statica dei fluidi; 2.3 Manometria; 2.4 Forze idrostatiche su corpi sommersi; 2.5 Fluidi accelerati, in assenza di forze di taglio; 2.6 Sommario

26 *Capitolo 3* – Modelli matematici per il moto dei fluidi

3.1 Introduzione e metodo; 3.2 Equazioni integrali; 3.3 Equazioni differenziali; 3.4 Sommario, applicazioni e problemi; Bibliografia

62 *Capitolo 4* – Analisi dimensionale e similitudine

4.1 Similitudine in fluidodinamica; 4.2 Parametri del moto incompressibile; 4.3 Parametri del moto compressibile; 4.4 Altri parametri interessanti nella trasmissione del calore libera convettiva nei fluidi; Bibliografia

75 *Capitolo 5* – Strato limite e correnti in tubazioni e condotte

5.1 Introduzione; 5.2 Correnti esterne; 5.3 Moto interno; 5.4 Sommario; Bibliografia.

106 *Capitolo 6* – Moto potenziale incompressibile

6.1 Teoria del moto potenziale; 6.2 Il teorema di Bernoulli; 6.3 Il teorema del vortice di Kelvin; moto del vortice; 6.4 Potenziale di velocità e funzione di corrente; 6.5 Alcuni moti semplici; 6.6 Il potenziale complesso; 6.7 Il potenziale complesso in alcuni moti semplici; 6.8 Circolazione. Il teorema di Joukowski; 6.9 Teoria dei profili alari; Bibliografia

136 *Capitolo 7* – Moto compressibile monodimensionale

7.1 Introduzione; 7.2 Moto isentropico; 7.3 Urti normali; 7.4 Moto adiabatico in sezione costante (linea di Fanno); 7.5 Moto senza attrito in sezione costante, con aumento e diminuzione di calore; 7.6 Moto isotermo con attrito; 7.7 Moto incompressibile per bassi numeri di Mach; 7.8 Il tubo d'urto; Bibliografia

156 *Capitolo 8* – Moto compressibile bidimensionale. Gasdinamica

8.1 Equazioni nel moto compressibile senza attrito; 8.2 Teoria dell'urto-espansione; 8.3 Piccole perturbazioni. Teoria linearizzata; 8.4 Il metodo delle caratteristiche; Bibliografia

178 *Capitolo 9* – Moto turbolento incompressibile

9.1 Introduzione; 9.2 Equazioni della velocità media; 9.3 Metodo statistico; 9.4 Teorie fenomenologiche; 9.5 Correlazioni per la turbolenza; 9.6 Turbolenza isotropa; 9.7 Turbolenza di parete; 9.8 Turbolenza libera; 9.9 Sommario; Bibliografia

194 *Capitolo 10* – Moto di strato limite ipersonico

10.1 Introduzione; 10.2 Equazioni dello strato limite; 10.3 Strato limite laminare ipersonico; 10.4 Strato limite turbolento ipersonico; 10.5 Sommario e discussione; Bibliografia

205 *Capitolo 11* – Magnetoidrodinamica

11.1 Introduzione; 11.2 Elettrodinamica dei mezzi in moto; 11.3 Forza elettromotrice indotta. Differenza di potenziale ai terminali; 11.4 La forza elettromagnetica di massa; 11.5 Concetti fondamentali sul moto in MID; 11.6 Il moto viscoso incompressibile in MID; 11.7 Onde e urti in MID; 11.8 Moto compressibile. Moto nei canali in magnetogasdinamica; Bibliografia

230 *Capitolo 12* – Fluidi non newtoniani

12.1 Introduzione; 12.2 Caratteristiche e classificazione dei fluidi non newtoniani; 12.3 Moto laminare nelle tubazioni; 12.4 Metodo generalizzato per il moto in tubazioni; Bibliografia

243 *Appendice A* – Alcune proprietà dei fluidi

246 *Appendice B* – Unità di misura e dimensioni

250 *Appendice C* – Alcune equazioni fondamentali in diversi sistemi di coordinate

259 *Indice analitico*

Prefazione

All'occhio disattento, le cose appaiono essere per lo più allo stato solido; ma se pensiamo agli oceani, all'atmosfera e allo spazio, diventa ovvio che buona parte della superficie terrestre e dell'intero universo si trova allo stato fluido.

Lo scienziato che studia la natura dell'universo s'interessa prevalentemente ai gas, ma anche l'ingegnere, che si cura soprattutto di meccanismi utili all'umanità, si trova quasi sempre a fare i conti coi fluidi. E' difficile infatti concepire una qualsiasi macchina o attrezzo che non contenga dei fluidi, o non venga disegnata secondo principi correlati alla meccanica dei fluidi. Aeroplani e navi si muovono in un mezzo fluido. L'atmosfera e il tempo atmosferico sono governati dalla dinamica dei fluidi. Tutte le macchine vanno lubrificate, e i lubrificanti sono fluidi. Perfino le valvole della radio dipendono da un gas di elettroni per il loro funzionamento. Per quanto complesso o esoterico sia un macchinario, valgono sempre per esso i concetti basilari della fluidodinamica. Per chi riesce a padroneggiare le poche idee di base della meccanica dei fluidi, si apre un'infinita serie di applicazioni pratiche.

Non è quindi necessario dilungarsi oltre sull'ovvia importanza della fluidodinamica nella scienza e nell'ingegneria di oggi. E' una delle basi dell'aeronautica ed astronautica, dell'ingegneria meccanica, della meteorologia, dell'ingegneria navale, civile e biologica, e veramente infine di quasi ogni ramo della scienza o dell'ingegneria.

Questo libro si può usare come testo fondamentale, o anche come ausiliario, per un corso propedeutico di meccanica dei fluidi. Esso si distingue comunque per il vasto numero di soggetti trattati: correnti ipersoniche, magnetoidrodinamica, fluidi non newtoniani: tutti argomenti mai prima riuniti insieme in libri di questo livello. Questi, ed altri argomenti avanzati, rendono ideale il libro come riferimento e testo supplementare per corsi universitari di vario livello.

I primi capitoli sono specialmente dedicati ai principianti, e insistono sui principi fondamentali del moto dei fluidi. I primi tre contengono uno sviluppo abbastanza completo delle equazioni di continuità in forma differenziale e integrale. Con molti esempi si introducono i concetti fondamentali di volume di controllo, dell'equazione di Bernoulli e del moto dei fluidi in generale. Nel capitolo 3 si trova un comodo sommario di equazioni fondamentali e una discussione generale sulla tecnica di risoluzione dei problemi, utile per il principiante.

Il livello del libro varia da capitolo a capitolo; quelli da 1 a 5 e il settimo sono un'introduzione alla meccanica dei fluidi con criteri da scuola superiore; i capitoli 6 e 8 si spingono fino all'aerodinamica subsonica e supersonica, toccando concetti a livello universitario.

Procedendo nei restanti capitoli, il lettore si rende conto che la materia si fa più complessa; la seconda metà del libro tratta argomenti che sono corrente oggetto di ricerca. Gli studi e le prove di oggi per esempio sono largamente orientati verso la turbolenza a regime incompressibile, le correnti ipersoniche, la magnetoidrodinamica, i fluidi non newtoniani. I relativi capitoli sono comunque impostati in modo che lo studioso, anche se non gli sono familiari gli specifici argomenti, ne ricavi tuttavia un'introduzione ai modelli matematici, alle semplificazioni, alle tecniche, al significato fisico, allo stato attuale della ricerca. Chi si sentirà portato all'approfondimento di uno degli argomenti trattati troverà dei riferimenti alla fine di ogni capitolo: riferimenti che possono integrare questo libro per un programma di studi personalizzato.

Gli autori ringraziano E.W. Gaylord per il valido aiuto prestato nella stesura del capitolo 12, Dorothy C. Wakefield e Mary Bathurst per aver battuto a macchina il manoscritto originale.

University Park, Pennsylvania — J.A. Brighton
Pittsburgh, Pennsylvania — W.F. Hughes

Luglio 1967

Nota all'edizione italiana

Una delle caratteristiche più notevoli di questo testo già di per sé degnissimo, e cioè la bibliografia, rischia di andar perduta per chi non possa o non voglia cimentarsi con la lingua inglese. Presentiamo allora, là dove possibile e in appresso a quelli originali, alcuni titoli della gloriosa e ugualmente florida letteratura italiana sull'argomento.

CAPITOLO 1

Introduzione

1.1 CHE COS'E' UN FLUIDO

La dinamica, che studia il movimento della materia, si può dividere in due parti: dinamica dei corpi rigidi e dinamica dei corpi non rigidi. Quest'ultima si divide ancora in due parti: elasticità (corpi solidi elastici) e meccanica dei fluidi. Sapendo che una gran parte della terra si trova allo stato fluido, è evidente che sia gli ingegneri che gli scienziati dovranno in qualche modo avere a che fare con i fluidi. Che cos'è dunque un fluido? e in che cosa differisce da quella che noi chiamiamo materia solida elastica, come quella di una barra d'acciaio?

In termini semplici, un fluido è una sostanza che non può resistere senza deformarsi a una forza di taglio, come invece accade ai solidi. I fluidi si dividono solitamente in liquidi e gassosi; i primi sono dotati di forze intermolecolari che li tengono insieme, in modo da avere un volume ma non una forma definita: versati in un contenitore, essi lo riempiono in percentuale pari al proprio volume, senza riguardo per la forma del contenitore stesso. I liquidi presentano scarsa compressibilità, e la loro densità varia poco con la temperatura e con la pressione. I fluidi gassosi d'altra parte sono costituiti da molecole in moto che si urtano continuamente e tentano di disperdersi: essi non avranno dunque mai un volume o una forma assegnati, e riempiranno completamente qualsiasi contenitore. Una massa gassosa, o un sistema gassoso assegnati vedranno la propria pressione, temperatura e volume collegati dalla legge dei gas, ovvero dall'opportuna equazione di stato.

Le numerose applicazioni della fluidodinamica rendono questa scienza uno dei campi dell'ingegneria più fecondi per ricerca e applicazioni. Per gli ingegneri civili essa è importante nello studio del moto dei fluidi in tubi e canali; per i meccanici è preziosa nell'ambito delle macchine a fluido: pompe, compressori, scambiatori di calore, motori a getto e razzi. L'aerodinamica poi è di interesse fondamentale per gli ingegneri aerospaziali, nella progettazione di velivoli, missili, razzi. La meteorologia, l'idrologia e l'oceanografia studiano atmosfera e oceano, che sono fluidi, con i metodi soliti della fluidodinamica. E nell'ingegneria moderna sono molte le discipline che si giovano delle tecniche della meccanica dei fluidi. Per esempio la meccanica dei fluidi e la teoria elettromagnetica si fondono nella magnetoidrodinamica, un metodo di ricerca vitale per nuovi sistemi di conversione dell'energia e nello studio dei fenomeni ionosferici e stellari.

Una buona conoscenza della meccanica dei fluidi è essenziale per l'ingegnere o scienziato di oggi, vista la notevole importanza di questa disciplina nei campi più diversi. In questo libro ne presenteremo i concetti fondamentali, insieme a diverse applicazioni. Diventati padroni di questi, si potranno meglio comprendere certi aspetti più specializzati passando alla letteratura più avanzata, e alle pubblicazioni universitarie e industriali. E' comunque essenziale una solida conoscenza delle basi, che non cambiano col tempo, e di cui ci si può sempre fidare, prima di passare ad argomenti più avanzati.

Diamo qui un'introduzione alla fluidodinamica presentandone le idee fondamentali, dalla formulazione matematica di base alla teoria moderna delle correnti ipersoniche, alla magnetoidrodinamica.

1.2 IL MODELLO MATEMATICO

Nella meccanica dei corpi rigidi di solito ci chiediamo: che posizione in funzione del tempo assume nello spazio una particella? Sapendo questo, rispondiamo a tutte le altre domande: per esempio quali siano velocità e accelerazione. Se il vettore di posizione $\mathbf{r}$ indica la coordinata di una particella, $\mathbf{r}(t)$ è il parametro che ci serve; velocità e accelerazione saranno $d\mathbf{r}/dt$ e $d^2\,\mathbf{r}/dt^2$.

Ma in un fluido non abbiamo a che fare con una singola particella: abbiamo un *continuo*. Non dobbiamo inseguire delle particelle isolate, o magari delle bolle di fluido. Ci conviene piuttosto chiederci: fissato un sistema arbitrario di riferimento, quale sarà in un certo punto dello spazio, identificato dal sistema suddetto, il valore di velocità, accelerazione, proprietà termodinamiche in funzione del tempo? In quel punto, al passare del tempo, il fluido si rinnova continuamente: noi non inseguiremo la singola particella, ma la storia di ciò che avviene in quel punto dello spazio, senza tener conto di quale particella di fluido si trovi lì in quel momento. Questa è la descrizione del fluido fatta dal punto di vista euleriano, opposto per criterio a quello lagrangiano, che insegue la singola particella come nel caso dei corpi rigidi. Analizzeremo i due criteri nel capitolo 3.

Abbiamo parlato di continuo. Cosa significa questo in fluidodinamica? Partiamo dall'ipotesi che la distanza tra particelle fluide (o molecole), e più precisamente il cammino libero medio, sia molto piccolo; piccolo in confronto alle dimensioni in gioco nel problema che stiamo studiando. In aerodinamica per esempio lo spessore dell'ala è maggiore per molti ordini di grandezza del cammino libero medio dell'aria che le scorre sopra. Accettiamo dunque l'ipotesi che tutti i procedimenti al limite del calcolo conservino un significato fisico, e che un qualsiasi volume di fluido possa essere diviso con continuità in volumi sempre più piccoli, che ne conservano l'originale carattere di continuo. E' ovvio che questa divisione alla fine perde di valore: le particelle arrivano a dimensioni microscopiche, e quindi non rivestono più per noi alcun interesse.

Tuttavia se non è questo il caso, e le particelle a dimensione minima ci interessano come nel moto dei gas rarefatti, in cui il cammino libero medio può essere dello stesso ordine di grandezza delle dimensioni fisiche del problema, l'assunzione del continuo fluido viene meno e dobbiamo usare un criterio strettamente microscopico. Tale è per esempio la teoria del moto libero molecolare. Noi però non ci occuperemo di queste teorie sui gas rarefatti, e rivolgeremo sempre la nostra attenzione a un continuo omogeneo isotropo, trattabile con metodi strettamente macroscopici.

In fluidodinamica abbiamo cinque variabili indipendenti: tre componenti di velocità e due proprietà termodinamiche; due qualsiasi di queste, pressione, temperatura, densità, entalpia, entropia, ecc., bastano a determinare lo stato, e quindi tutte le altre proprietà. Il campo di corrente fluida è completamente determinato una volta che si sia specificato il vettore di velocità $\mathbf{V}$ e due proprietà termodinamiche in funzione di spazio e tempo. Abbiamo allora bisogno di cinque equazioni indipendenti: ci sono di solito le tre componenti dell'equazione del moto, un'equazione di continuità e un'equazione dell'energia. Spesso si introduce anche un'equazione di stato, per poter scrivere l'equazione dell'energia in funzione di tre variabili (temperatura, densità e pressione) invece di due soltanto. Avremo così sei variabili e sei equazioni. Nel moto turbolento però compaiono delle incognite addizionali per lo stesso numero di equazioni, il che impedisce una completa formulazione teorica del problema.

Per un fluido incompressibile l'equazione dell'energia non serve, perché la densità è nota e bisogna trovare solo pressione e velocità per descrivere completamente il moto del fluido; la temperatura è allora separata dal problema: se si vuol conoscerla, bisognerà usare un'equazione dell'energia.

1.3 ALCUNE DEFINIZIONI

Il moto dei fluidi si può classificare in diversi modi; ne studieremo ora alcune delle diverse espressioni, collegandole ad esperienze ed osservazioni che si possono fare nella vita di ogni giorno. Proponiamo prima alcune definizioni, in modo da avere un linguaggio che ci permetta di discutere il nostro assunto. Più tardi ne avanzeremo di più rigorose, ma per ora diamo delle definizioni semplici, in certo modo euristiche.

(*a*) **Pressione.** In un fluido in quiete la pressione si definisce come la forza normale di compressione per unità di superficie (sforzo normale) che agisce su di una superficie immersa nel fluido stesso. Essa può essere misurata dalla forza agente sulla faccia del cubo unitario (cioè con gli spigoli di dimensione uno) giacente in detto fluido. Naturalmente il cubetto non deve disturbare il fluido: in tal modo la pressione effettiva in un punto è pari alla forza che agisce su di una faccia del cubo, al limite in cui l'area diviene infinitamente piccola. In un fluido in quiete questa pressione in un punto è isotropa: essa rimane la stessa su tutte le facce del cubo, e rimane tale per qualsiasi orientamento del cubo stesso nello spazio: si tratta di una pressione idrostatica. E' la pressione che si usa in termodinamica (leggi dei gas) ed è una proprietà termodinamica. Se nel fluido la pressione varia da punto a punto, su un qualsiasi volume di fluido agirà una forza di pressione netta che dev'essere equilibrata da una forza di massa, come quella di gravità; in caso contrario la forza di pressione provocherà un'accelerazione nel fluido, e il medesimo si muoverà.

Se il fluido è in moto si possono avere in esso non solo forze di pressione ma anche forze, o tensioni, di taglio. Comunque la pressione è ancora isotropa e risulta definita nel modo già visto; bisogna però pensare ad essa come allo sforzo normale che agisce su un'areola moventesi insieme al fluido. Ci sono talvolta delle difficoltà per i gas in moto, nei quali gli sforzi normali agenti su un cubetto non sono certo gli stessi in ogni direzione. Possiamo ancora definire una pressione isotropa idrostatica, ma per effetto della viscosità del fluido risultano in certe direzioni delle piccole forze addizionali: approfondiremo questi concetti nei prossimi due capitoli.

(*b*) **Viscosità, attrito, moto ideale.** Tutti i fluidi sono affetti da viscosità, la quale a sua volta genera attrito; l'importanza di quest'ultimo nelle varie situazioni dipende dal tipo di fluido, e dalla particolare configurazione del moto in atto. Se l'attrito è trascurabile, siamo in presenza di un moto ideale; da questa condizione ci allontana, oltre all'attrito stesso, anche la turbolenza.

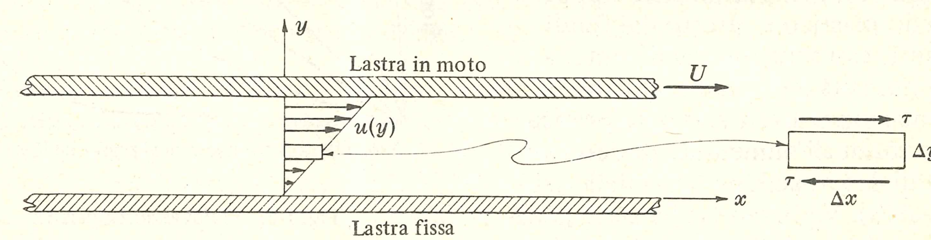


Fig. 1-1. Illustrazione della viscosità con un moto tra lastre parallele. La velocità u è lineare nel canale, vale zero in basso e U in alto. Sull'elementino è evidenziato lo sforzo di taglio.

Possiamo dire che la viscosità misura la resistenza al taglio del fluido, quando quest'ultimo è in moto (ricordiamo che esso non può, come invece possono i solidi, resistere senza spostarsi ad una sollecitazione a taglio). Immaginiamo due lastre parallele di grandi dimensioni come in fig. 1-1, in moto relativo uniforme. Il fluido tra esse compreso presenta l'andamento lineare di velocità che vediamo (sempre che non esista un gradiente di pressione lungo le piastre, nella direzione del moto). Non c'è scorrimento tra fluido e lastre: all'interfaccia fluido-solido, la velocità del fluido coincide con quella del solido. Se consideriamo un elementino fluido, come in fig. 1-1, lo sforzo di taglio τ all'estremità superiore (numericamente uguale

in questo caso a quello che si riscontra all'estremità inferiore) può esprimersi come segue:

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \qquad (1.1)$$

in cui la viscosità μ è la costante di proporzionalità tra lo sforzo di taglio e il gradiente di velocità. Nel sistema tecnico la viscosità si misura in kg s/m^2 ; il rapporto tra viscosità e densità ρ è la viscosità cinematica ν.

La viscosità di un liquido diminuisce all'aumentare della temperatura (come ben sa chi cerca di avviare un'auto in un mattino d'inverno), mentre quella dei gas aumenta. La viscosità dei fluidi dipende anche dalla pressione; ma nei problemi d'ingegneria questa dipendenza è di piccola importanza, paragonata con quella legata alle variazioni di temperatura.

La semplice relazione tra sforzo di taglio e gradiente di velocità è nota come regola di Newton: i fluidi che la seguono sono noti come fluidi newtoniani. (Svilupperemo più tardi un'espressione generalizzata della regola, adatta per fluidi newtoniani che ammettono dei gradienti di velocità in tre dimensioni.)

Anche se la relazione lineare di Newton è solo un'approssimazione, essa conserva una sorprendente precisione per una vasta gamma di fluidi. Per certe sostanze tuttavia lo sforzo di taglio può essere funzione non solo del gradiente di velocità (velocità di deformazione a taglio) ma anche della semplice deformazione: si tratta di sostanze viscoelastiche. Anche dei semplici fluidi viscosi, in cui lo sforzo di taglio dipende solo dal gradiente di velocità, possono essere non newtoniani; può esistere infatti una relazione non lineare piuttosto complicata tra sforzo di taglio e velocità di deformazione. Se la relazione sforzo-deformazione dipende da lavoro o deformazione precedenti, il fluido si dice tixotropico (caso degli inchiostri da stampa).

Un altro tipo di fluido presenta un comportamento plastico, caratterizzato da uno snervamento apparente: si ha un solido fino allo snervamento, poi ci si trova di fronte ad un fluido viscoso; è il caso di alcuni grassi e certi fanghi. Un comportamento opposto a quello plastico è offerto dai fluidi dilatanti: essi scorrono facilmente, a bassa viscosità, con basse velocità di deformazione; diventano però praticamente solidi all'aumentare di detta velocità di deformazione (caso delle sabbie mobili). Vediamo evidenziato graficamente il comportamento di questi fluidi in fig. 1-2.

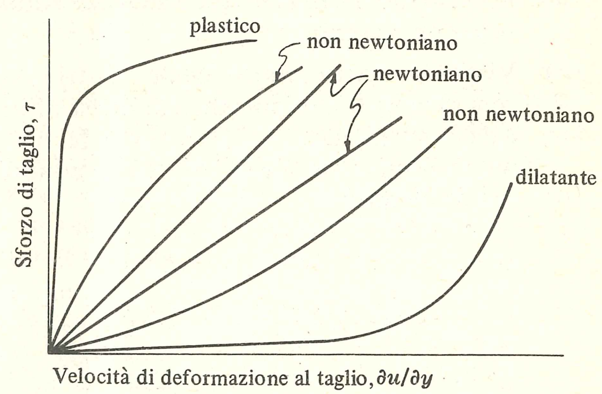


Fig. 1-2. Fluidi viscosi e plastici.

L'acqua, l'aria, i gas sono dei fluidi essenzialmente newtoniani. Lo studio però dei fluidi visco-elastici, o non newtoniani, anche se in genere non bene compreso o apprezzato è molto importante nella meccanica dei fluidi.

La viscosità di un fluido può dunque generare attrito o sollecitazioni interne; la turbolenza inoltre può generare sforzi di taglio, come vedremo in seguito.

Se un fluido non è affetto da viscosità, e non è dotato di moto turbolento, si definisce ideale; possiamo dire, più correttamente, che si tratta di un fluido in moto ideale. Un simile moto dunque non presenta attrito interno, e non vi sono dissipazioni o perdite. Certo nessun fluido è mai veramente ideale: ve ne sono alcuni però, almeno in certe condizioni di moto e sotto

particolari condizioni, che si avvicinano molto alle condizioni ideali e che per l'analisi si considerano tali. Si considera per esempio ideale lo scorrimento dell'aria su oggetti (aerodinamica), con l'eccezione di uno strato sottile (strato limite) contiguo all'ala o alla superficie in gioco. E' conveniente, come vedremo, distinguere in differenti regioni il moto dei fluidi reali, considerando di volta in volta zone dotate di moto ideale, viscoso, turbolento.

(*c*) **Moto laminare e moto turbolento.** Col termine laminare, o puramente viscoso, s'intende il moto di un fluido che scorre in lamine, o strati; questo in opposizione al moto turbolento, in cui le componenti di velocità presentano delle fluttuazioni turbolente casuali rispetto ai propri valori medi (fig. 1-3). Un rivolo di sostanza colorante o d'inchiostro, inserito in una corrente laminare, scorre sottile e risulta sempre composto dalle stesse particelle fluide. In una corrente turbolenta il rivolo si spezzetterebbe e procedendo si mischierebbe col fluido ospite: vedremmo miriadi di filetti e nuvole allargarsi e disperdersi con la corrente. Un vivido esempio di moto laminare si può trovare nello sciroppo denso che esce da una bottiglia.



Fig. 1-3. Moto laminare e moto turbolento. Le linee indicano la traiettoria delle particelle.

Da cosa dipende che un moto sia laminare o turbolento? Per un dato fluido, dipende dalla velocità, e dalla dimensione, o configurazione del canale. All'aumentare della velocità il moto passa da laminare a turbolento attraverso un periodo di transizione. E anche se in natura si ritrovano entrambi, il moto turbolento sembra essere quello in cui ci si ritrova più facilmente.
Detta transizione è bene evidenziata dal fumo di una sigaretta: per un certo tratto esso sale con moto laminare imperturbato; poi, quasi di colpo, esso comincia a mescolarsi, diventa turbolento, e la colonna di fumo si espande e diffonde rapidamente. La turbolenza collabora alla diffusione del fumo, e lo disperde in una caotica corrente in espansione.

Nel modo turbolento gli effetti della viscosità sono sempre presenti, ma sono solitamente mascherati dai predominanti sforzi di taglio, dovuti alla turbolenza stessa.

(*d*) **Tensione superficiale.** Questo è un termine che si usa liberamente, per identificare l'apparente sollecitazione nello strato superficiale di un liquido: questo strato si comporta come una membrana tesa, e può dar luogo ad una differenza di pressione attraverso una superficie liquida curva, interfaccia tra aria e liquido. La tensione superficiale è comunque un'energia associata ad ogni interfaccia fluido-fluido: quella aria-liquido è il tipo più comune. Sapendo che la superficie liquida si comporta come una membrana, possiamo capire perché un liquido può formare un menisco nei capillari, e perché le gocciole di pioggia hanno forma più o meno sferica.

(*e*) **Moto compressibile e incompressibile.** E' usuale dividere i fluidi in due categorie: gas e liquidi; i primi sono compressibili, e la loro densità varia rapidamente con la temperatura e la pressione. I liquidi d'altro canto sono piuttosto difficili da comprimere: nella maggior parte dei problemi possiamo considerarli incompressibili; solo in casi particolari, come la propagazione del suono nei liquidi, terremo conto della loro compressibilità.

La densità di un gas è legata alla temperatura e alla pressione dalla cosiddetta legge dei gas (per un gas perfetto ricordiamo $p = \rho RT$). Quanto ai liquidi, la densità dipende dalla temperatura secondo un coefficiente di espansione come per i solidi; il legame con la pressione

può essere espresso dalla

$$dp = \beta \, d\rho/\rho \qquad (1.2)$$

in cui β è il modulo di elasticità di volume; per l'acqua esso vale circa 2,1 x 10^4 kg/cm^2, cioè per ottenere una piccola variazione di densità sono necessarie delle pressioni enormi. (Per l'aria atmosferica sotto compressione adiabatica, β vale 1,4 kg/cm^2). Quindi nella maggior parte delle applicazioni pratiche i liquidi vengono considerati incompressibili; lo stesso vale per i gas, quando le condizioni del moto comportano piccole variazioni di pressione. (Caso dell'aerodinamica subsonica, in cui per bassi numeri di Mach l'aria si considera incompressibile).

(*f*) **Moto subsonico e supersonico.** Nel campo dei moti compressibili esiste una notevole differenza tra velocità inferiori a quella del suono (moto subsonico) e velocità superiori (moto supersonico). In condizioni normali di temperatura e di pressione, CNTP, la velocità del suono nell'aria è di circa 330 m/s, ovvero 1200 km/h. Fisseremo più avanti queste differenze, ma è utile comunque ricordare che le cosiddette onde d'urto si verificano soltanto nei moti supersonici.

Il numero di Mach M è un indice tipico di queste differenze, e viene definito come rapporto tra la velocità del fluido e la velocità locale del suono:

$$M = V/a \qquad (1.3)$$

con V velocità del fluido, a velocità locale del suono. Se $M < 1$ siamo nel moto subsonico, con $M > 1$ abbiamo moto supersonico. Nel moto attorno agli oggetti M è minore di 0,3; si può accettare l'ipotesi di moto incompressibile. Siamo in presenza di moto transonico se il fluido scorre su di una parte del corpo (aeroplano o missile, diciamo) con $M < 1$, mentre su un'altra zona dello stesso corpo si ha $M > 1$, in modo che in qualche punto si registrerà $M = 1$. Il fatto che nello stesso momento si possa avere sullo stesso corpo $M < 1$ ed $M > 1$ si spiega ricordando che la velocità del suono e quella del fluido variano sulla superficie investita dalla corrente. E poiché in genere la temperatura su detta superficie non si mantiene costante, anche la velocità locale del suono cambierà.

(*g*) **Moto permanente.** E' il moto caratterizzato dal fatto che nel tempo non variano, in qualsiasi punto dello spazio, le componenti della velocità e le proprietà termodinamiche. Veramente, se dovessimo seguire la singola particella fluida, le sue proprietà e la velocità potrebbero cambiare durante il moto: questo comunque non importa. Nella meccanica dei fluidi la domanda è sempre: che cosa sta succedendo in un certo punto dello spazio, senza tener conto di quale sia la particella fluida che effettivamente occupa quel punto in un particolare momento? In questo modo allora moto permanente vuol dire che nulla cambia nel tempo in nessun punto dello spazio. Una ripresa cinematogafica, o una fotografia, appaiono le stesse indipendentemente dal momento in cui sono state fatte. Un punto importante da capire è che un fluido può risentire di un'accelerazione in un punto dello spazio, anche nel moto permanente. Pur muovendosi, in un qualsiasi punto dello spazio la particella fluida si comporta come tutte le altre particelle che sono transitate nello stesso punto.

(*h*) **Tipi, o classi di moto.** Abbiamo discusso alcune definizioni fondamentali, collegate a determinati tipi di moto dei fluidi; possiamo ora vedere quali sono questi tipi di moto, che effettivamente si riscontrano nella realtà fisica, e classificarli di conseguenza. Vedremo che si possono avere moti laminari incompressibili, moti ideali supersonici compressibili, moti laminari compressibili, moti turbolenti incompressibili, ecc.

1.4 CLASSIFICAZIONI FISICHE. TIPI DI MOTO

Il moto del fluido può essere classificato in molti modi, seguendone come già visto la struttura, oppure secondo la situazione fisica, o la configurazione, che rientrino in uno dei gruppi studiati. Vediamo qualcuna di queste classificazioni.

Vi sono essenzialmente due tipi di configurazione fluida, cioè di collocamento del moto nello spazio: moto esterno e moto interno. Il moto interno riguarda le correnti in tubi, canali e simili: il fluido si muove entro limiti ben precisi. Il moto esterno è quello di un fluido attorno a un oggetto, come in aerodinamica. Studiamo adesso questi due moti più da vicino.

(*a*) **Moto esterno.** Il campo di velocità attorno a un oggetto si può dividere in tre regioni. Lontano dal corpo interessato il moto è essenzialmente ideale: l'attrito è trascurabile. Vicino al corpo, il fluido sviluppa uno straterello che risente di un'azione di taglio (perché la velocità, che ha un certo valore nella zona indisturbata, passa a zero sulla superficie del corpo in esame), e in detto straterello predomina l'azione della viscosità, magari anche insieme alla turbolenza. Si tratta dello strato limite, che può essere laminare o turbolento. Dietro al corpo si forma una scia (terza tra le regioni ben distinte che stiamo esaminando), ed è di solito una regione di alta turbolenza e bassa pressione (da cui la resistenza generata dalla scia stessa). Vediamo in fig. 1-4 la corrente attorno a un cilindro, e la formazione della scia, dovuta a separazione dello strato limite dalla superficie del corpo. Di seguito al corpo la zona indisturbata esterna alla scia e la scia stessa sono ben separate da una superficie di discontinuità (fig. 1-4*a*).

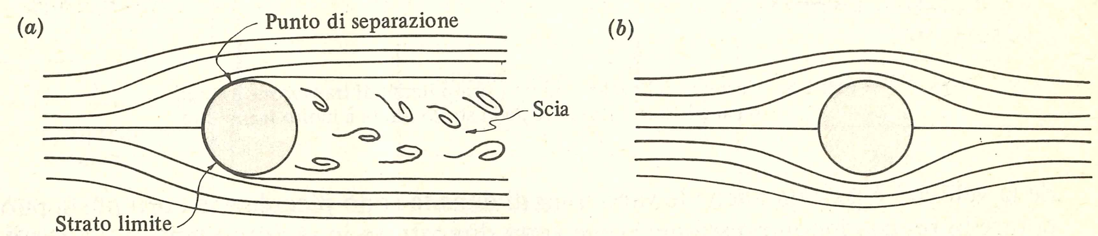


Fig. 1-4. (*a*) Strato limite, e separazione su di un cilindro. (*b*) Moto ideale, quando non c'è separazione.

La scia è generata dallo strato limite, indotto a sua volta dalla viscosità del fluido. Se la viscosità fosse nulla, in modo tale che nel fluido non vi fosse assolutamente attrito, non vi sarebbe separazione né scia. E in questo caso il campo di velocità sarebbe ideale, simmetrico sia nella parte anteriore che in quella posteriore del cilindro, in corrispondenza alle quali la pressione conserverebbe lo stesso valore; quindi un oggetto immerso in un fluido in moto non presenterebbe resistenza. Ma questa mancanza di resistenza non è d'accordo con l'esperienza, e ci rendiamo conto che tutti i fluidi debbono presentare un certo grado di attrito interno. Nei tempi in cui si cominciava a porre la fluidodinamica in forma di scienza, si pensava che la viscosità fosse trascurabile: matematicamente il moto risultava ideale in ogni punto; la teoria non poteva prevedere alcuna resistenza (fig. 1-4*b*). Conclusione contraria all'esperienza, come si è detto, e indicata quindi col nome di paradosso di d'Alembert. Solo all'inizio di questo secolo, quando Prandtl (uno studioso tedesco di meccanica dei fluidi) introdusse il concetto di strato limite, apparve evidente che non esiste alcun paradosso: qualsiasi valore della viscosità, non importa quanto piccolo, può dar luogo alla scia e alla conseguente resistenza.

Se un corpo è affusolato (fig. 1-5), presenta cioè il bordo d'uscita gradualmente raccordato, non vi sarà separazione e lo strato limite racchiuderà completamente il corpo. La forma affusolata riduce grandemente la resistenza, ed è questa la forma che viene data alla maggior parte dei corpi studiati dall'aerodinamica: ali, ecc. In questi casi il moto è completamente ideale attorno al corpo, con l'eccezione dello strato limite e di una scia sottile. In questi casi, come vedremo, lo strato limite può essere piuttosto sottile e il campo di velocità risulta ben descritto con un moto ideale, calcolando a parte la resistenza d'attrito. Nell'aerodinamica subsonica la portanza è determinata dal moto potenziale (ideale), la resistenza essenzialmente dallo strato limite.

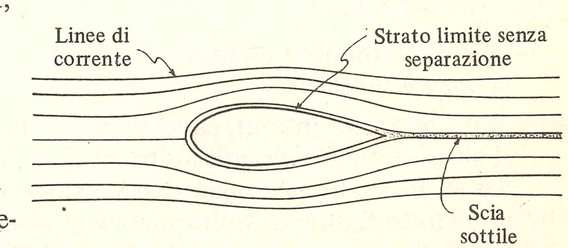


Fig. 1-5. Andamento delle linee di corrente attorno ad un oggetto. La curvatura graduale del bordo d'uscita previene la separazione dello strato limite.

Lo strato limite stesso può essere laminare o turbolento, a seconda dei parametri interessati. Nella maggior parte dei casi che si presentano esso passa da laminare a turbolento lungo il corpo interessato; la transizione ritarda di solito la separazione, ma nei corpi parzialmente affusolati quest'ultima può non essere distinta, e lo strato limite turbolento è sommerso dalla scia come in fig. 1-6.

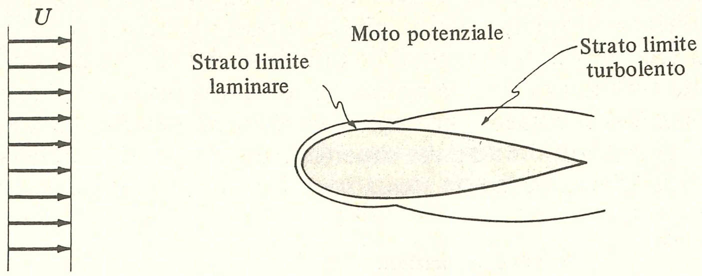


Fig. 1-6. Corrente subsonica con uno strato limite di transizione e senza separazione. Lo spessore dello strato limite è molto ingrandito.

Se la velocità è piccola anche le variazioni di densità sono piccole e la corrente si può considerare in regime incompressibile, come verrà dimostrato in seguito (cap. 7). La corrente si presenta allora come nelle figg. 1-5 o 1-6.

Se la velocità aumenta fino ad un numero di Mach maggiore di 0,3 le variazioni di densità divengono sensibili, ma l'andamento generale della corrente si mantiene ancora come nella figura precedente. Quando però il numero di Mach raggiunge un valore maggiore di uno si forma un'onda d'urto, e la corrente assume l'aspetto di fig. 1-7.

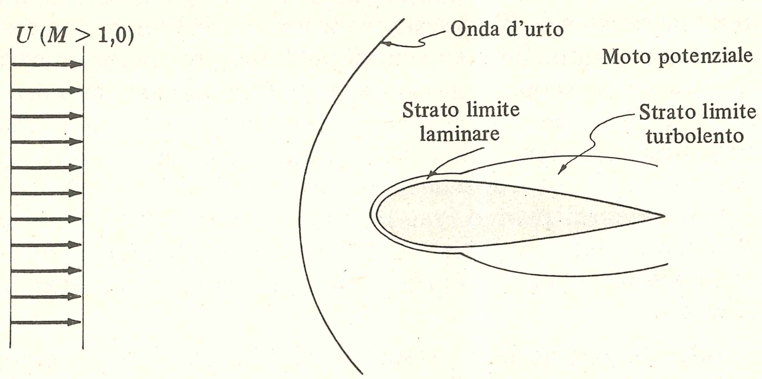


Fig. 1-7. Moto supersonico attorno a un oggetto.

Quando il numero di Mach raggiunge un valore maggiore di circa sei, si riscontrano dissociazione e ionizzazione.

(*b*) **Moto interno.** In tubi, canali, ugelli e nelle macchine a fluido la corrente è limitata da pareti: si parla in questo caso di moto interno. Il moto interno di un gas in un condotto si può considerare ideale nella maggior parte della sezione, ma anche qui tuttavia si sviluppa alle pareti uno strato limite, di solito turbolento. Sia nel moto viscoso che in quello turbolento lo strato limite si va ispessendo a valle, fino ad occupare l'intera sezione della condotta o del tubo.

Possiamo ormai fare una suddivisione per argomenti, come nella seguente fig. 1-8, in cui la colonna di sinistra passa dai casi semplici a quelli più complicati.

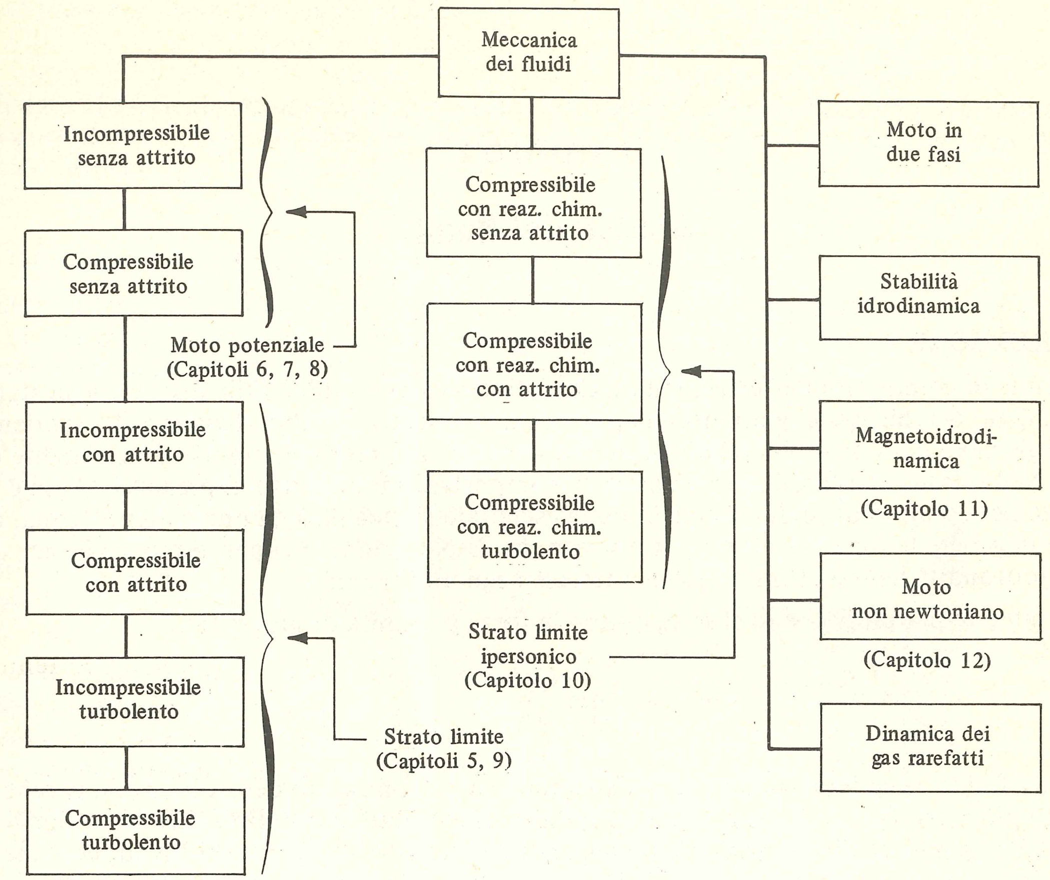


Fig. 1-8. Divisione per argomenti della meccanica dei fluidi.

PROBLEMI SUPPLEMENTARI

Riportiamo qui alcuni semplici esperimenti che illustrano il comportamento in moto di alcuni fluidi.

1.1. Versiamo un po' di miele, o di melassa di canna, su un piatto. Aggiungiamo un po' di latte e cerchiamo di mescolare: cosa succede? La viscosità è tale che l'agitazione dovuta al mescolamento è laminare, ed è piuttosto lenta. Un'agitazione di tipo turbolento è molto più veloce: perché? Siamo in presenza anche di diffusione molecolare, ma in uno sciroppo pesante essa è di scarsa importanza in confronto al mescolamento.

1.2. Osserviamo il fumo di una sigaretta: comincia in modo laminare, poi di colpo diventa turbolento. Al salire del fumo il moto si fa instabile, e sfocia in un moto turbolento.

1.3. Aprire un rubinetto dell'acqua, e regolare il flusso in modo che ne esca un getto sottilissimo, laminare. Cosa succede all'acqua pochi centimetri più in basso? Il flusso diventa di nuovo instabile e turbolento.

1.4. Aumentiamo la portata nell'esempio precedente: cosa succede? Nel condotto l'acqua entra in regime turbolento, e tale è ancora il moto all'uscita dal rubinetto.

1.5. Osserviamo un sistema nuvoloso in un giorno di vento, specialmente uno che porti con sé un acquazzone. E' turbolento il suo moto? E' in una scala differente da quello che si ha nel rubinetto dell'acqua?

1.6. Con una sigaretta accesa o con una pipa generiamo una colonna di fumo; prendiamo una matita, e teniamola orizzontalmente in mezzo alla colonnina. Guardando ad una estremità della matita potremo vedere la corrente di fumo, e la separazione dello strato limite ai due lati. E' meglio dar luogo ad una intensa colonna di fumo, soffiando nella pipa o nella sigaretta.

1.7. Perché sale il fumo nell'esempio precedente?

CAPITOLO 2

Statica dei fluidi

2.1 PRESSIONE

Prima di cominciare l'effettivo studio della dinamica dei fluidi è utile discuterne la statica, specialmente perché essa ci permette di applicare dei concetti che appartengono all'esperienza di ogni giorno a dei veri problemi d'ingegneria, senza restar presi in nozioni eccessivamente complesse. Nella statica dei fluidi riveste particolare importanza il concetto di pressione. Esso è importante per esempio nel determinare la forza esercitata su una diga da una massa d'acqua, o per trovare in genere le forze agenti sui corpi sommersi. Esplorazione, ricuperi e sopravvivenza alle grandi profondità hanno attirato molto interesse negli ultimi anni.

S'intende per pressione lo sforzo, ovvero la forza per unità di superficie,

$$p \equiv \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA} \qquad (2.1)$$

Se per un fluido reale immaginiamo che l'area tenda a zero, nascono delle difficoltà, perché non abbiamo più a che fare con un continuo. Tra l'idea di continuo e la definizione usuale delle derivate e delle grandezze differenziali c'è un apparente contrasto, che permea lo sviluppo delle equazioni differenziali della meccanica dei fluidi. Noi lo evitiamo, assumendo che il fluido si comporti come un continuo negli ordini di grandezza macroscopici che interessano noi.

Consideriamo un recipiente di liquido, in riposo. Se tracciamo un confine immaginario attorno a una piccola parte del volume interessato, non essendoci accelerazione, la forza complessiva che agisce sulla massa fluida dev'essere zero. Consideriamo in particolare il volume elementare di fig. 2-1.

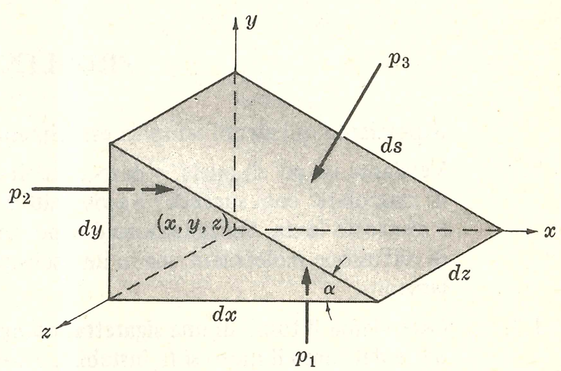


Fig. 2-1. Equilibrio delle forze di pressione su di un elementino fluido.

Non si ha moto relativo nel fluido, quindi lo sforzo di taglio è ovunque zero; le forze superficiali agenti sul fluido sono tutte normali (di pressione). L'unica forza di massa è dovuta al campo gravitazionale terrestre, che agisce nella direzione y negativa. Sommando allora le forze agenti sull'asse delle x abbiamo:

$$p_2\, dy\, dz - p_3\, dz\, ds \sin\alpha = 0$$

in cui $ds \sin\alpha = dy$ e quindi $p_2 = p_3$. In direzione y[1],

$$p_1\, dx\, dz - p_3\, dz\, ds \cos\alpha - \tfrac{1}{2}\rho g\, dx\, dy\, dz = 0$$

in cui ρ è la densità del fluido, e $ds \cos\alpha = dx$, per cui

$$p_1 - p_3 - \tfrac{1}{2}\rho g\, dy = 0$$

[1] In questo libro useremo di solito il kilogrammo massa: ρ avrà dunque dimensioni di kg/cm^3; il peso specifico γ sarà in kg$_f$/cm^3, secondo la $\gamma = \rho g$. Per una discussione più approfondita su unità e dimensioni, vedere l'appendice B.

Essendo piccolo il terzo termine rispetto agli altri due,

$$p_1 = p_2 = p_3$$

E dato che l'elemento di volume può essere orientato a piacere, e l'angolo α è arbitrario, abbiamo dimostrato che per un fluido in quiete la pressione in un punto è la stessa in ogni direzione: è cioè isotropa.

2.2 EQUAZIONI DIFFERENZIALI DELLA STATICA DEI FLUIDI

Definiremo lo stato d'equilibrio come quello in cui ogni particella fluida o è in riposo, o non ha moto relativo rispetto ad altre particelle: la differenza consiste nel fatto che nel primo caso non può esservi accelerazione del sistema fluido, mentre nel secondo si può avere. Considereremo entrambi i casi.

Abbiamo due tipi di forze da considerare: (1) forze di massa, che agiscono a distanza sulle particelle fluide (per es. gravità, campi magnetici, ecc.) e (2) forze di contatto, dovute ad azione diretta di altre particelle fluide o di pareti solide (sono forze dovute a pressione e tangenziali, cioè di taglio).

Consideriamo di nuovo un recipiente di liquido in quiete, scegliendo però stavolta una particella elementare di fluido cubica, come in fig. 2-2. La forza di gravità agisce nel senso delle z negative.

Possiamo assumere che la pressione su ogni faccia sia costante: tutte le variazioni sono infatti del secondo ordine, e non influiscono sul risultato finale. Sommiamo le forze nelle diverse direzioni:

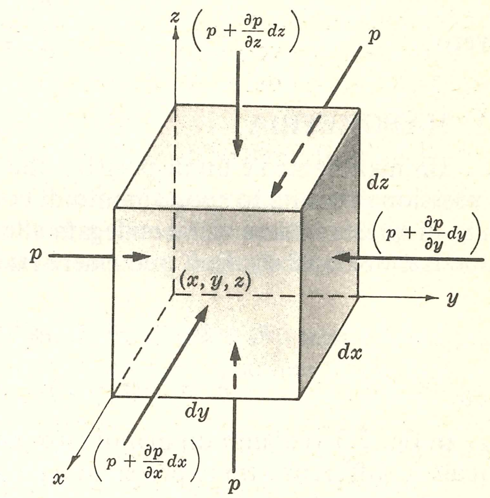


Fig. 2-2

asse delle x: $$p\, dy\, dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx\right) dy\, dz = 0$$

asse delle y: $$p\, dx\, dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y} dy\right) dx\, dz = 0$$

asse delle z: $$p\, dx\, dy - \left(p + \frac{\partial p}{\partial z} dz\right) dx\, dy - \rho g\, dx\, dy\, dz = 0$$

Semplificando,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \qquad (2.2)$$

Dalle equazioni (2.2) abbiamo

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \qquad (2.3)$$

che è un'equazione fondamentale nella statica dei fluidi. Se la densità del fluido stesso è costante, essa può essere integrata

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = -\rho g \int_{z_1}^{z_2} dz$$

ottenendo

$$p_2 - p_1 = -\rho g (z_2 - z_1) \qquad (2.4)$$

che descrive la variazione della pressione con la quota, per un fluido in equilibrio statico. Si può fare una semplice e indipendente ricostruzione della (*2.3*) considerando le forze che agiscono su di un cilindro retto circolare, di asse verticale rispetto alla superficie terrestre.

L'equazione (*2.4*) vale per un fluido incompressibile; consideriamo per un momento le variazioni di pressione che si verificano nei fluidi compressibili. Partendo dalla (*2.3*) valida per un gas ideale, abbiamo

$$dp \;=\; -\frac{pg}{RT}\,dz$$

in cui R = costante dei gas, T = temperatura assoluta. Assumendo un'atmosfera isoterma, possiamo integrare quest'ultima equazione ottenendo

$$\ln\frac{p}{p_1} \;=\; -\frac{g}{RT}(z-z_1)$$

ovvero

$$p \;=\; p_1\,e^{-(g/RT)(z-z_1)} \tag{2.5}$$

2.3 MANOMETRIA

Un manometro è un dispositivo che indica differenze di pressione tramite lo spostamento di colonne fluide; l'altezza di queste ultime viene collegata alle differenze di pressione tramite la (*2.4*). Essa può essere riscritta così:

$$p_2 - p_1 \;=\; \gamma h \;=\; \rho g h \tag{2.6}$$

in cui

$$h \;=\; -(z_2 - z_1) \tag{2.7}$$

In fig. 2-3 vediamo un manometro con tubo ad U, con il quale la differenza tra le pressioni p_A e p_B si può determinare nel modo che segue. La pressione nel punto a è data dalla

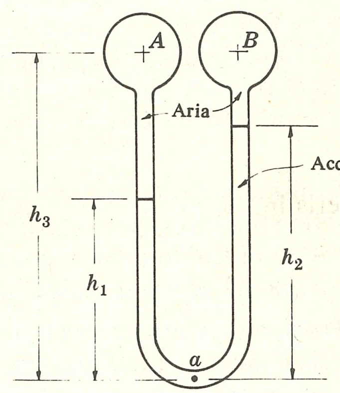


Fig. 2-3. Manometro con tubo a U.

$$p_a \;=\; h_1\gamma_{H_2O} + (h_3 - h_1)\gamma_{aria} + p_A$$

ovvero

$$p_a \;=\; h_2\gamma_{H_2O} + (h_3 - h_2)\gamma_{aria} + p_B \tag{2.8}$$

Sottraendo,

$$p_A - p_B \;=\; (h_2 - h_1)(\gamma_{H_2O} - \gamma_{aria}) \tag{2.9}$$

Il peso specifico dell'aria è piccolo rispetto a quello dell'acqua: la differenza di pressione dunque è circa pari alla differenza tra le altezze delle due colonnine, moltiplicata per il peso specifico dell'acqua:

$$p_A - p_B \;=\; (h_2 - h_1)\gamma_{H_2O} \tag{2.10}$$

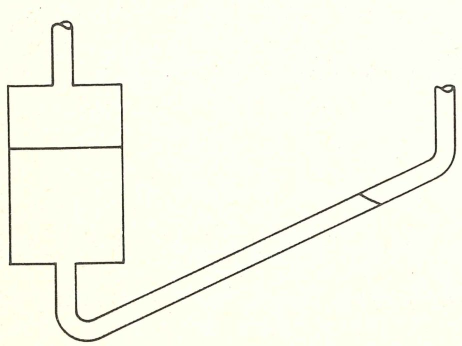


Fig. 2-4. Manometro inclinato.

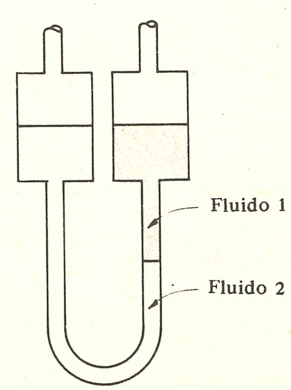


Fig. 2-5. Manometro a due fluidi.

A seconda dell'applicazione, i manometri possono avere forme e disposizioni differenti, e usare fluidi diversi. Ad esempio, per ottenere una maggiore precisione rispetto al manometro verticale si può usare il manometro inclinato di fig. 2-4. Maggior precisione si ottiene anche con il manometro a due fluidi di fig. 2-5; in queste ultime due applicazioni la relazione tra differenze di pressione ed escursione di colonna fluida si ottiene con lo stesso metodo visto per il manometro con tubo ad U.

2.4 FORZE IDROSTATICHE SU CORPI SOMMERSI

La forza superficiale totale che agisce su di un corpo si può trovare facendo la somma vettoriale delle forze superficiali differenziali che agiscono sull'area interessata:

$$\mathbf{F} \;=\; \int_A d\mathbf{F} \tag{2.11}$$

in cui

$$d\mathbf{F} \;=\; p\,d\mathbf{A}$$

e

$$p \;=\; p_0 + \gamma h \tag{2.12}$$

essendo p_0 = pressione sulla superficie libera, e h = quota al di sotto della superficie libera.

Queste equazioni sono sufficienti a determinare le forze agenti sui corpi sommersi; nelle applicazioni specifiche basterà allora scrivere la profondità h e l'area differenziale dA in funzione della stessa variabile d'integrazione. Quindi, prima di integrare l'equazione, bisognerà scriverla in forma scalare. Consideriamo alcuni casi.

(*a*) **Lastra piana orizzontale.** Consideriamo una lastra piana orizzontale, immersa ad una profondità h al di sotto del pelo libero come in fig. 2-6; la forza agente su una faccia sarà

$$F \;=\; \int_A dF \;=\; \int_A (p_0 + \gamma h)\,dA \;=\; (p_0 + \gamma h)A \tag{2.13}$$

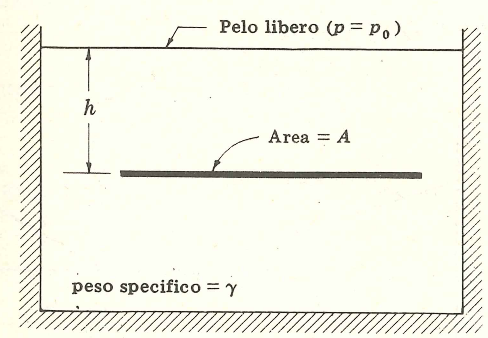


Fig. 2-6. Lastra piana orizzontale, immersa.

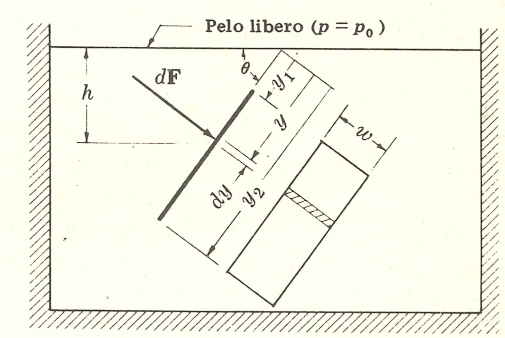


Fig. 2-7. Lastra piana inclinata, immersa.

(*b*) **Lastra piana inclinata.** Consideriamo adesso una superficie inclinata sommersa, come in fig. 2-7. La forza agente è normale alla lastra, e vale

$$F \;=\; \int_A dF \;=\; \int_A (p_0 + \gamma h)\,dA \;=\; p_0 A + \gamma\int_{y_1}^{y_2} wy\sin\theta\,dy$$

$$=\; p_0 A + \tfrac{1}{2}\gamma w\sin\theta\,(y_2^2 - y_1^2) \tag{2.14}$$

(*c*) **Superficie curva.** Per una superficie di questo tipo, come quella di fig. 2-8, le componenti della forza sono

$$F_x \;=\; \int_A (p_0 + \gamma h)\,dA_x \tag{2.15}$$

$$F_y \;=\; \int_A (p_0 + \gamma h)\,dA_y \tag{2.16}$$

Integrare queste equazioni non è sempre il metodo più conveniente per trovare le forze che agiscono sui corpi sommersi; possiamo osservare per esempio che la componente verticale della forza che agisce su di una superficie sommersa qualsiasi è equivalente, cioè pari al peso del fluido che insiste direttamente sulla superficie stessa, più la forza dovuta alla pressione presente al pelo libero. La componente orizzontale dal canto suo si può trovare considerando una superficie verticale piana, pari alla proiezione dell'area in questione.

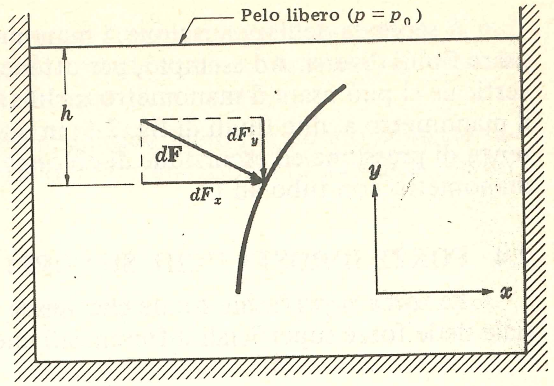


Fig. 2-8. Lastra curva, sommersa.

(*d*) **Spinta idrostatica.** Per il principio di Archimede, un corpo sommerso è soggetto ad una forza, diretta verso l'alto, pari al peso di fluido spostato; si tratta della forza di galleggiamento, uguale dunque al volume del corpo immerso per il peso specifico del fluido.

E' importante notare che la spinta idrostatica si può anche calcolare sommando tutte le componenti verticali dei prodotti pressione-area sulla superficie bagnata del corpo:

$$F_B = \int_A p\,dA_y \tag{2.17}$$

il che, come abbiamo già notato, ci porta alla

$$F_B = \gamma \times \text{volume} \tag{2.18}$$

2.5 FLUIDI ACCELERATI, IN ASSENZA DI FORZE DI TAGLIO

Nei paragrafi precedenti parlavamo di fluidi in quiete. Consideriamo adesso dei fluidi dotati di una accelerazione costante (nel tempo), costituiti però da particelle che non si muovono una rispetto all'altra: il fluido si muove dunque come un corpo rigido. Consideriamo per esempio il contenitore di fig. 2-9: è soggetto ad una accelerazione costante, verso l'alto e verso destra. Con lo stesso metodo visto nel paragrafo 2.2 possiamo applicare la legge di Newton ad una particella elementare racchiusa nel contenitore:

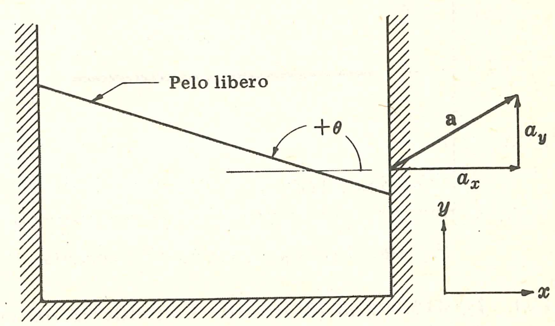


Fig. 2-9. Recipiente in moto accelerato. La gravità è orientata nel senso delle y negative, quindi a_x ed a_y sono rispettivamente parallela e perpendicolare alla superficie terrestre. Con a_x ed a_y positive la pendenza risulta negativa, come in figura.

$$\partial p/\partial x = -\rho a_x, \qquad \partial p/\partial y = -(\rho a_y + \gamma)$$

Integrando,

$$p = -[\rho a_x x + (\rho a_y + \gamma) y] + C \tag{2.19a}$$

Ponendo $p = p_0$ troviamo la forma della superficie libera: si tratta di un piano. Le superfici a pressione costante sono dei piani paralleli, la cui pendenza rispetto al piano orizzontale è data dalla

$$\theta = \tan^{-1} a_x/(a_y + g) \tag{2.19b}$$

con θ identificato come in fig. 2-9.

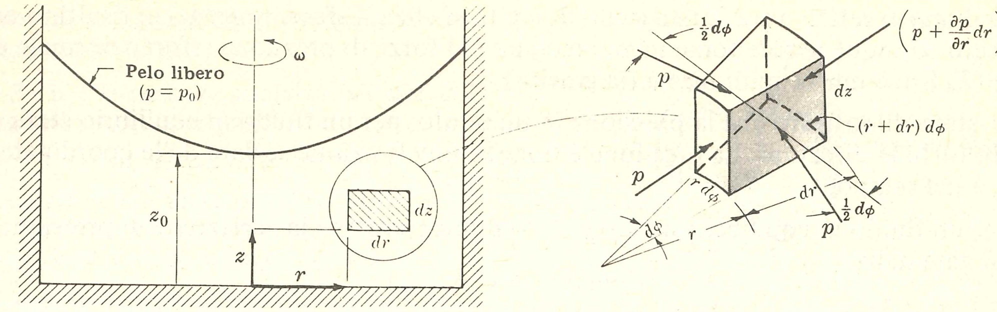


Fig. 2-10. Recipiente rotante. La forza di gravità agisce nel senso delle z negative.

Un altro esempio di particelle fluide soggette ad accelerazione costante si incontra quando una massa liquida ruota uniformemente come un tutto, senza moto relativo tra i suoi elementi. Sia ω la velocità angolare costante, e sia ρ la densità del liquido. Assumiamo delle coordinate polari, con z ed r come in fig. 2-10; la coordinata angolare è ϕ; l'accelerazione centripeta agente sulla particella che si trova sul raggio r è $-\omega^2 r$, in direzione r. Dalla legge di Newton abbiamo sulle z:

$$-\rho g r\,dr\,d\phi\,dz + p r\,dr\,d\phi - \left(p + \frac{\partial p}{\partial z}dz\right) r\,dr\,d\phi = 0 \quad \text{ovvero} \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

Nel senso delle r, assumendo $\sin \frac{1}{2}d\phi \approx \frac{1}{2}d\phi$,

$$p\,dz\,r\,d\phi - \left(p + \frac{\partial p}{\partial r}dr\right) dz\,(r + dr)\,d\phi + 2p\,dz\,dr\,(\tfrac{1}{2}d\phi) = -\rho\,dz\,r\,d\phi\,dr\,\omega^2 r$$

che diventa (trascurando i termini di ordine superiore)

$$\partial p/\partial r = \rho\omega^2 r \tag{2.20}$$

Notiamo che $p = p(r, z)$, e quindi

$$dp = \frac{\partial p}{\partial r}dr + \frac{\partial p}{\partial z}dz$$

Sostituendo in $\partial p/\partial r$ e $\partial p/\partial z$,

$$dp = \rho\omega^2 r\,dr - \rho g\,dz$$

Integrando,

$$p = \tfrac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 - \rho g z + C \tag{2.21}$$

Per $r = 0$ e $z = z_0$ abbiamo $p = p_0$. L'equazione (*2.21*) diventa allora

$$p - p_0 = \tfrac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 + \rho g(z_0 - z) \tag{2.22}$$

Al pelo libero, in cui $p = p_0$, avremo

$$z = z_0 + \tfrac{1}{2}\omega^2 r^2/g \tag{2.23}$$

che corrisponde ad un paraboloide di rivoluzione.

Notare che a z costante l'aumento di p è proporzionale ad r^2; su questo principio si basa il funzionamento delle macchine centrifughe; la massa di liquido da esse racchiusa viene fatta ruotare rapidamente, creando una forte differenza di pressione tra centro e periferia.

2.6 SOMMARIO

In questo capitolo abbiamo considerato delle forze agenti su fluidi che (1) erano in equilibrio statico (in quiete), e (2) erano sottoposti ad una accelerazione costante. In entrambi i casi la

assenza di moto relativo tra le particelle fluide fa sì che gli sforzi tangenziali risultino ovunque pari a zero. Dunque le sole forze in gioco erano (1) forze di pressione (sforzo normale di superficie) e (2) forze uniformi di massa (la gravità).

E' stato dimostrato che la pressione in un punto, per un fluido in equilibrio statico, è la stessa in tutte le direzioni. La pressione è dunque una funzione scalare delle coordinate nello spazio, e del tempo.

Per un fluido in equilibrio statico è stato dimostrato che la variazione di pressione con la quota è data dalla

$$dp/dz = -\gamma = -\rho g$$

e per un fluido incompressibile,

$$p_2 - p_1 = -\gamma(z_2 - z_1)$$

utile per calcolare la pressione in vari tipi di letture manometriche.

Le forze che agiscono su superfici sommerse si trovano integrando il prodotto area-pressione a tutta la superficie in gioco, rispetto alle componenti scalari dell'equazione vettoriale:

$$F_x = \int_A p\, dA_x, \qquad F_y = \int_A p\, dA_y$$

in cui $p = p_0 + \gamma h$. Usando allora queste equazioni in un caso specifico, la sola ulteriore relazione che resta da trovare è quella tra le aree elementari e la quota sotto il pelo libero, h, e una comune e comoda variabile d'integrazione.

La forza di galleggiamento si può calcolare in due modi: (1) integrando la componente verticale del prodotto area-pressione su tutta la superficie sommersa del corpo, oppure (2) moltiplicando il volume di fluido spostato dal corpo stesso per il peso specifico del fluido.

Se ci troviamo in presenza di un fluido sottoposto ad una accelerazione costante, senza che ci sia moto relativo tra le particelle che lo costituiscono, dalla legge di Newton applicata all'elemento infinitesimo abbiamo

$$\partial p/\partial x = -\rho a_x, \quad \text{e} \quad \partial p/\partial y = -(\rho a_y + \gamma)$$

in cui a_x ed a_y sono le componenti del vettore accelerazione, rispettivamente parallela e perpendicolare alla superficie della terra.

PROBLEMI RISOLTI

2.1. Il manometro a mercurio di fig. 2-11 è collegato all'ingresso e all'uscita di una pompa per acqua (il ramo di sinistra comunica con l'ingresso, quello di destra con l'uscita). Nel caso che ingresso e uscita siano alla stessa quota, trovare l'aumento di pressione creato dalla pompa.

La pressione sul punto a si ricava facendo la differenza tra quella dovuta alla colonna di liquido nel ramo di sinistra:

$$p_a = h_1\gamma_{Hg} + h_2\gamma_{Hg} + h_3\gamma_{H_2O} + p_{ingr}$$

e quella nel ramo di destra:

$$p_a = h_1\gamma_{Hg} + h_2\gamma_{H_2O} + h_3\gamma_{H_2O} + p_{usc}$$

Sottraendo:

$$p_{usc} - p_{ingr} = h_2(\gamma_{Hg} - \gamma_{H_2O})$$
$$= 15\,(13{,}6 - 1) \times 10^{-3} = 0{,}189 \text{ kg/cm}^2$$

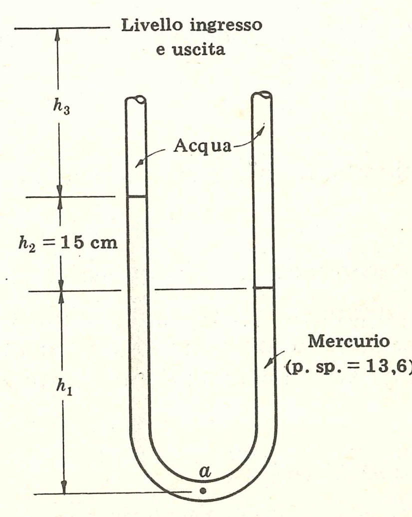


Fig. 2-11

2.2. Trovare in fig. 2-12 la pressione manometrica al punto A.

In B e in C la pressione assoluta è la stessa; in B essa vale $\gamma_1 h_1 + p_a$ e quindi

$$p_A = (p_a + \gamma_1 h_1) + \gamma_2 h_2$$

Con γ_1 e γ_2 abbiamo indicato rispettivamente i pesi specifici del mercurio e dell'acqua. Così, per definizione di pressione manometrica,

$$p_{A\,manom} = p_A - p_a = \gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2$$
$$= (13{,}6 \times 38 + 76)\,10^{-3} = 0{,}593 \text{ kg/cm}^2$$

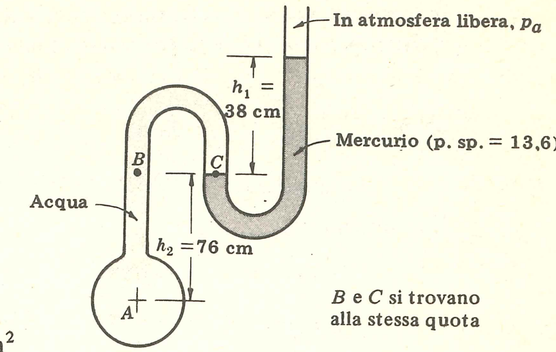


Fig. 2-12

2.3. Trovare la pressione al punto A nel manometro inclinato di fig. 2-13.

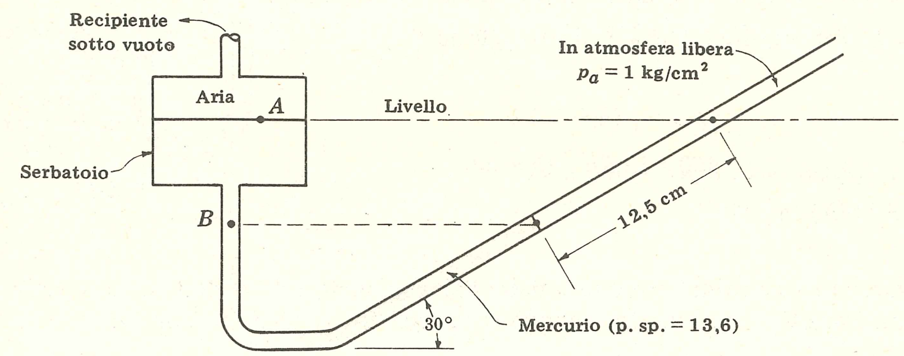


Fig. 2-13

$$p_B = p_A + \gamma h$$

p_B è la pressione atmosferica, e allora

$$p_A = p_a - \gamma h = 1 - (13{,}6)(12{,}5/2)\,10^{-3} = 0{,}915 \text{ kg/cm}^2$$

Notare che il livello del mercurio nel tubo inclinato risulta più basso che nel serbatoio, perché in questo ultimo si sta praticando il vuoto.

2.4. Nella tubazione di fig. 2-14 circola acqua; trovare la pressione manometrica nei punti A, B, C.

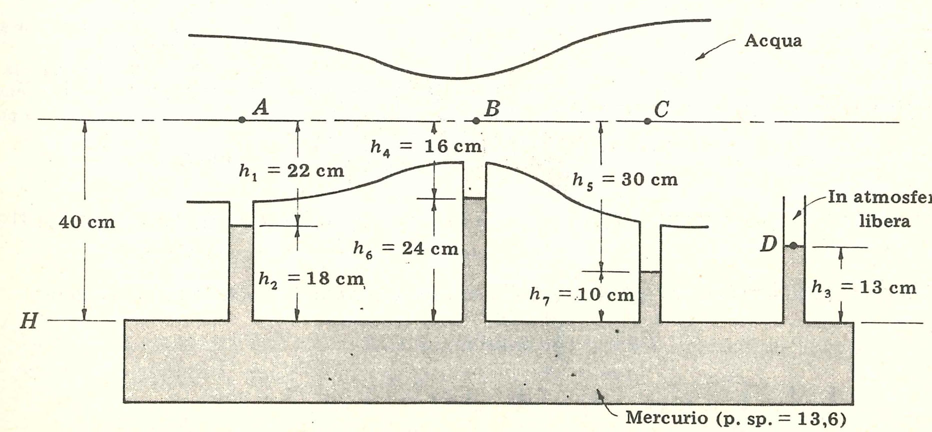


Fig. 2-14

Indichiamo con γ_1 il peso specifico dell'acqua e con γ_2 quello del mercurio; partiamo dal punto D e arriviamo prima al livello HH e poi ai diversi punti della tubazione.

$$p_A = p_a + \gamma_2 h_3 - \gamma_1 h_1 - \gamma_2 h_2$$

Ma $p_{\text{manom}} = p - p_a$, e allora

$$p_{A\ \text{manom.}} = 13{,}6\,(0{,}13)\,10^3 - (0{,}22)\,10^3 - 13{,}6\,(0{,}18)\,10^3 = -900 \text{ kg/m}^2$$

E similmente

$$p_{B\ \text{manom}} = \gamma_2 h_3 - \gamma_1 h_4 - \gamma_2 h_6 = -1340 \text{ kg/m}^2$$

$$p_{C\ \text{manom}} = \gamma_2 h_3 - \gamma_1 h_5 - \gamma_2 h_7 = 108 \text{ kg/m}^2$$

2.5. Dell'acqua passa attraverso l'ugello di fig. 2-15. Trovare l'altezza h sapendo che la pressione manometrica in A è di 350 g/cm^2.

Partendo dalla superficie libera B ed arrivando ad A, abbiamo

$$p_A = p_a + \gamma_2 h - \gamma_1\,(h + 60)$$

$$p_{A\ \text{manom}} = 350 = 13{,}6\,h - (h + 60)$$

da cui $h = 32$ cm.

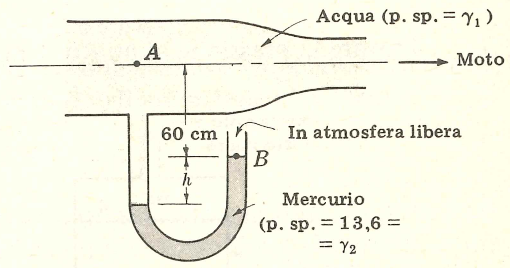


Fig. 2-15

2.6. Trovare la forza totale esercitata dall'acqua sulla superficie della diga in fig. 2-16; questa ultima è larga 1,5 m, mentre l'acqua raggiunge una profondità di 3 m.

Per avere la forza totale dobbiamo integrare la pressione elementare su tutta la superficie bagnata della diga:

$$F = \int_A dF = \int_A p\,dA = \int_0^3 1{,}5\gamma y\,dy = 1{,}5\gamma\left[y^2/2\right]_0^3 = 6750 \text{ kg}_f$$

Non abbiamo considerato la pressione atmosferica che agisce sul pelo libero dell'acqua, perché equilibrata dalla stessa pressione, che agisce sul fianco libero della diga.

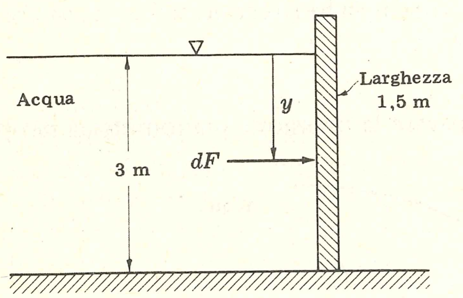


Fig. 2-16

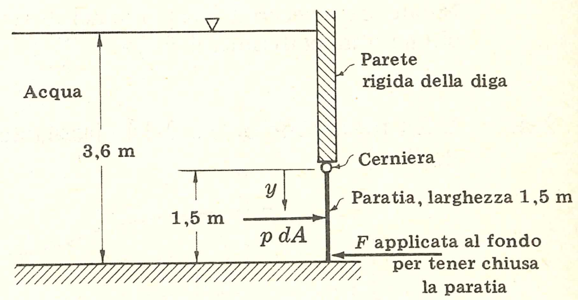


Fig. 2-17

2.7. Trovare la forza F necessaria a tener chiusa la paratia nella diga di fig. 2-17. Detta paratia è larga 1,5 m.

Per l'equilibrio statico dev'essere uguale a zero la somma dei momenti attorno alla cerniera:

$$1{,}5\,F - \int_A y\,p\,dA = 0$$

Così $\quad 1{,}5\,F = \int_0^{1{,}5} y\,\gamma(2{,}1 + y)\,1{,}5\,dy = 1{,}5\,(1)\left[2{,}1\,y^2/2 + y^3/3\right]_0^{1{,}5}$

da cui $F = 3{,}48$ tonn.

2.8. Trovare la forza esercitata dall'acqua sulla superficie inclinata di fig. 2-18, incernierata sul lato superiore e larga 3 m.

La forza complessiva è normale alla paratia, e si può trovare integrando la pressione rispetto alla superficie totale:

$$F = \int_A dF = \int_A p\,dA = \int_A \gamma h\,dA$$

$$= \int_0^{1{,}5} \gamma(1 + y \sin 30°)\,3\,dy$$

$$= 3(1)\left[y + \tfrac{1}{4}y^2\right]_0^{1{,}5} = 6{,}18 \text{ tonn.}$$

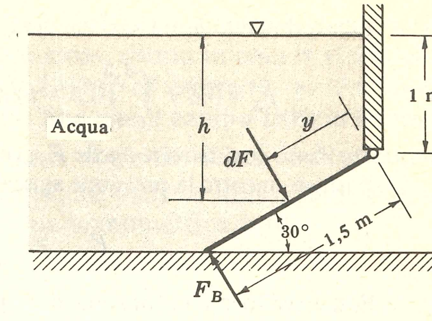


Fig. 2-18

Anche qui il lato destro della superficie considerata è esposto all'atmosfera, quindi non consideriamo nel calcolo la pressione atmosferica. La forza complessiva si può scomporre in due componenti x ed y, e si può trovare per la risultante un punto di applicazione tale che, ai fini della determinazione delle reazioni alla cerniera e sul fondo della lastra, essa sia equivalente alla forza dovuta alla pressione. Calcoleremo nel problema 2.9 la forza di reazione alla base; dopo sarà semplice trovare il punto d'applicazione della risultante.

2.9. Trovare la forza totale di reazione del fondo sulla parte inferiore della paratia di fig. 2-18, problema 2.8. Trovare anche il punto di applicazione della forza F equivalente all'azione complessiva dell'acqua.

La somma dei momenti rispetto alla cerniera dev'essere uguale a zero, per l'equilibrio. La pressione può dare una forza unicamente normale alla paratia; quindi, trascurando il peso della paratia stessa, le reazioni alla cerniera e sul fondo risulteranno normali alla lastra. Facendo la somma dei momenti attorno alla cerniera:

$$F_B \times 1{,}5 = \int_A y\,dF = \int_A y(\gamma h)\,dA$$

$$= \gamma \int_0^{1{,}5} y(1 + y \sin 30°)\,3\,dy = 3 \times 1\left[y^2/2 + y^3/6\right]_0^{1{,}5} = 5{,}040 \text{ tonn}\cdot\text{m}$$

da cui $F_B = 3{,}36$ tonn.

Se la forza risultante F, equivalente alla pressione, è applicata in $y = y_0$, sarà $Fy_0 = F_B(1{,}5)$, e allora

$$y_0 = 3{,}36\,(1{,}5)/6{,}18 = 0{,}82 \text{ m.}$$

2.10. Trovare la forza dovuta alla pressione agente sulla superficie curva di fig. 2-19, larga 60 cm.

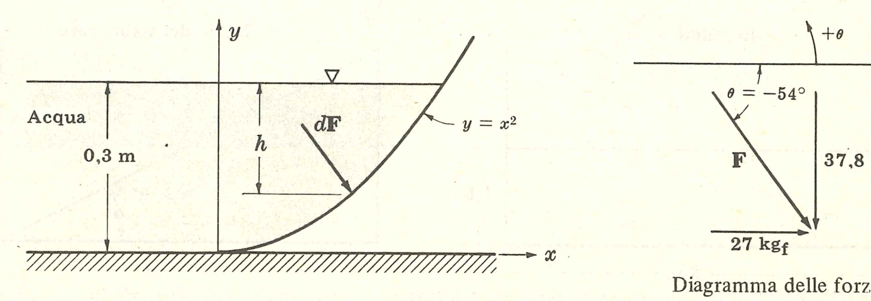


Fig. 2-19

Per la forza esercitata dall'acqua sulla lastra possiamo scrivere l'equazione generale $\mathbf{F} = \int_A d\mathbf{F}$, ma per poterla integrare, quest'ultima va posta in forma scalare:

$$F_x = \int_A dF_x = \int_A p\,dA_x = \int_A (\gamma h)\,0{,}6\,dy$$

Ed esprimendo h in funzione di y,

$$F_x = 0{,}6\,\gamma \int_0^{0,3} (0{,}3 - y)\,dy = 0{,}6 \times 1000 \left[0{,}3y - y^2/2\right]_0^{0,3} = 27\ \mathrm{kg_f}.$$

Possiamo così trovare anche F_y, ricordando che questa è per definizione positiva nel senso delle y positive, mentre la pressione agisce verso il basso, nel senso delle y negative. Allora

$$F_y = \int_A dF_y = -\int_{A'} p\,dA_y = -0{,}6\gamma \int_0^{0,3} (0{,}3 - y)\,dx$$

E, mettendo la y in funzione di x, possiamo scrivere:

$$F_y = -0{,}6\,\gamma \int_0^{0,3} (0{,}3 - x^2)\,dx = -37{,}8\ \mathrm{kg_f}$$

Il segno negativo ci dice che F_y agisce verso il basso. La grandezza della forza dovuta alla pressione sarà

$$|\mathbf{F}| = (F_x^2 + F_y^2)^{1/2} = 46{,}3\ \mathrm{kg_f}$$

la cui direzione è data da $\tan\theta = F_y/F_x = -1{,}40$, ovvero $\theta = -54{,}5°$. L'angolo θ è quello formato da **F** con l'orizzontale ed è negativo, come si vede in fig. 2-19: la forza risultante agisce verso il basso.

2.11. Per misurare l'accelerazione di un'automobile si può usare un accelerometro con tubo ad U come quello di fig. 2-20. Esso viene installato a bordo in modo che i rami risultino verticali; il tubo è aperto, ed è riempito parzialmente da un liquido a peso specifico γ. Per un'accelerazione costante a_x, il liquido assume la configurazione che vediamo in figura. Mettere in relazione l'accelerazione con i pertinenti parametri.

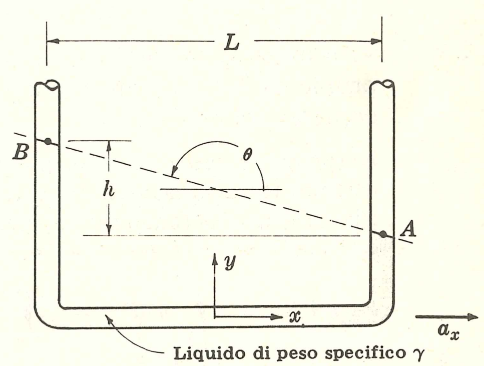


Fig. 2-20

Il liquido si comporta esattamente come se si trovasse in un recipiente aperto, di larghezza L. L'angolo θ dell'equazione (*2.19b*) risulta allora

$$\tan\theta = -h/L = -a_x/g$$

e abbiamo $a_x = gh/L$.

2.12. Quando il recipiente di fig. 2-21 è a riposo, l'acqua lo riempie per una profondità di 1,50 Per quale valore di a_x l'acqua comincerà a risalire la parete posteriore?

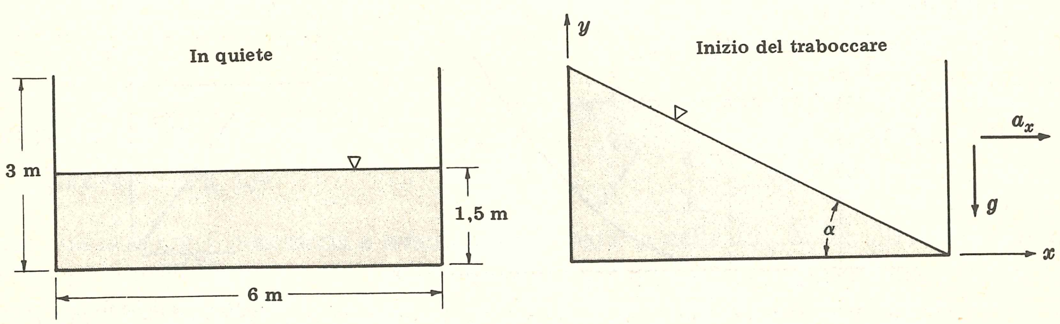


Fig. 2-21

All'aumentare di a_x l'acqua sale lungo la parete posteriore; all'atto di raggiunger l'orlo essa avrà risalito 1,5 metri, mentre sul lato opposto si sarà abbassata dello stesso valore. Avremo allora, al traboccare dell'acqua, $\tan\alpha = 3/6 = a_x/g$, e quindi $a_x = g/2 = 4{,}9\ \mathrm{m/s^2}$. Notare come per convenienza sia stato definito un angolo α pari al negativo dell'angolo θ visto nell'equazione (*2.19b*).

2.13. Dimostrare che se un recipiente che contiene del liquido subisce un'accelerazione costante **a** nel campo gravitazionale **g**, la distribuzione di pressione risulta in esso la stessa che si ha in condizioni di quiete, in un campo gravitazionale fittizio di valore (**g**–**a**). Assumendo che la gravità agisca nel senso delle y negative, è come dire che il campo fittizio ha un valore assoluto $\sqrt{(a_y+g)^2 + a_x^2 + a_z^2}$, ed è il vettore somma di **g** e del negativo di **a**, come si vede in fig. 2-22. Spiegare adesso perché un contenitore che cadesse liberamente nel campo gravitazionale avrebbe all'interno un liquido a pressione manometrica zero.

Vediamo dall'equazione (*2.19a*) che nel fluido le superfici a pressione costante sono dei piani; nell'ipotesi che non vi siano delle variazioni sull'asse delle z, e che la gravità agisca nel senso delle y negative, la variazione di pressione normale ai piani a pressione costante si può scrivere, usando la regola di differenziazione di una variabile in direzione normale ad una superficie:

$$dp/dh = [(\partial p/\partial x)^2 + (\partial p/\partial y)^2]^{1/2}$$

Esplicitando il calcolo, otteniamo

$$dp/dh = \rho\sqrt{(a_y+g)^2 + a_x^2}$$

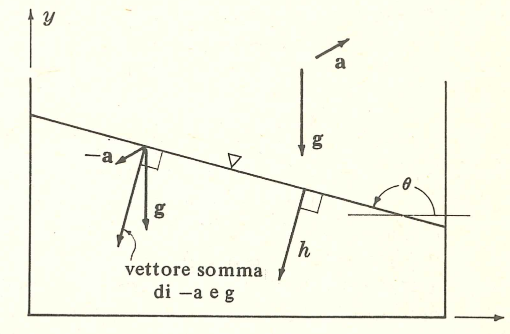


Fig. 2-22

che si può estendere a tre dimensioni, dandoci

$$dp/dh = \rho\sqrt{(a_y+g)^2 + a_x^2 + a_z^2}$$

E integrando

$$p = p_0 + \rho h\sqrt{(a_y+g)^2 + a_x^2 + a_z^2}$$

La superficie libera e i piani a pressione costante sono inclinati in modo da risultare normali al vettore (**g**–**a**), e questo si vede immediatamente dall'equazione (*2.19b*).

2.14. Discutere il comportamento di un serbatoio, riempito con due fluidi immiscibili a densità differenti e sottoposto ad una accelerazione costante come in fig. 2-23. La gravità agisce nel senso delle y negative, e si assume che il vettore **a** abbia solo le componenti x ed y.

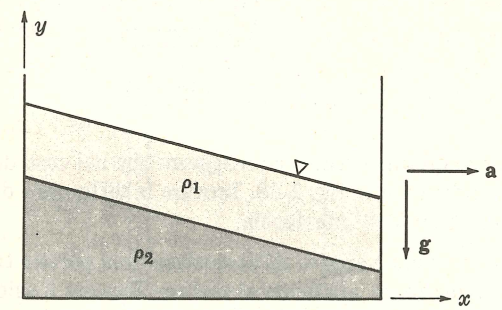


Fig. 2-23

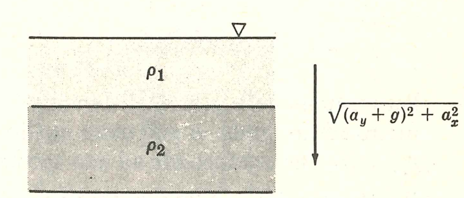


Fig. 2-24

Sappiamo dal problema precedente che il sistema si comporta come se fosse sotto l'effetto di un campo gravitazionale fittizio (**g**–**a**). Le superfici a pressione costante sono dunque dei piani e possiamo ridurre il problema al sistema di fig. 2-24, con un campo gravitazionale equivalente, e trattarlo come un semplice problema di statica allo stesso modo del manometro a due fluidi. Potremmo anche risolvere l'equazione di equilibrio (*2.19a*) e avere lo stesso risultato. Pendenza della superficie libera ed interfaccia sono le stesse che nel caso di un unico liquido.

PROBLEMI SUPPLEMENTARI

2.15. Nel serbatoio di fig. 2-25 la pressione sulla superficie liquida è di 0,27 kg/cm^2 maggiore della pressione atmosferica. Trovare l'altezza h nel caso che il liquido sia (*a*) acqua, (*b*) mercurio.

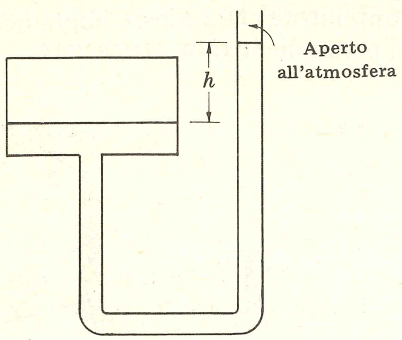


Fig. 2-25

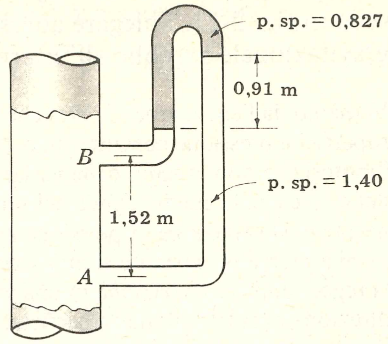


Fig. 2-26

2.16. Trovare il cambiamento di pressione (kg/cm^2) tra i punti A e B per il moto nel tubo verticale in fig. 2-26.

2.17. Trovare la lettura al manometro nel problema 2.16, quando il moto è orizzontale invece che verticale. Il manometro conserva lo stesso orientamento, mentre i punti A e B si trovano alla stessa quota.

2.18. Per misurare il salto di pressione d'aria nella tubazione di fig. 2-27 si usa un manometro inclinato; quanto vale questo salto (kg/cm^2) nelle condizioni di figura?

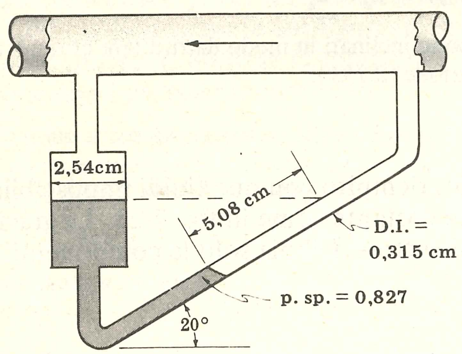


Fig. 2-27

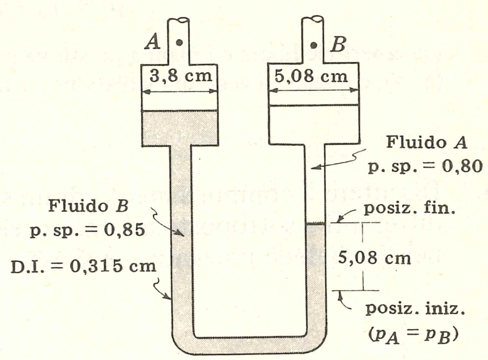


Fig. 2-28

2.19. Per misurare delle piccole differenze di pressione con una precisione maggiore che nel caso del manometro ad un fluido, si può usare quello a due fluidi come in fig. 2-28. Trovare la differenza di pressione $p_A - p_B$ che corrisponde ad uno spostamento di 5 cm dell'interfaccia.

2.20. Il serbatoio di fig. 2-29 è riempito parzialmente d'acqua e aperto all'atmosfera; una paratia triangolare è incernierata alla base, e viene tenuta chiusa da una forza applicata al vertice. Trovare il valore di questa forza.

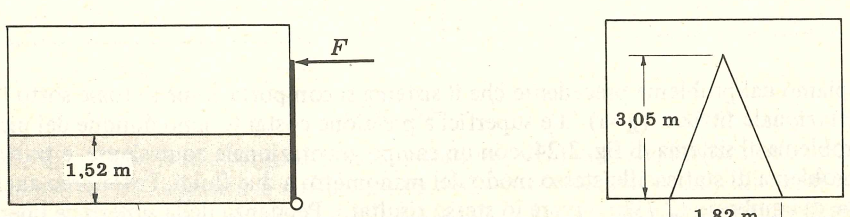


Fig. 2-29

2.21. Un sommozzatore deve scendere sotto la superficie dell'acqua (fig. 2-30) con un contenitore, e deve aprire la porta che si vede in figura. Nell'ipotesi che la pressione interna del locale sommerso sia quella atmosferica, e che la massima trazione che il sommozzatore può esercitare sia di 68 kg$_f$, trovare la massima profondità cui potrà scendere.

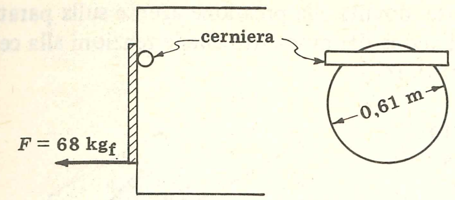


Fig. 2-30

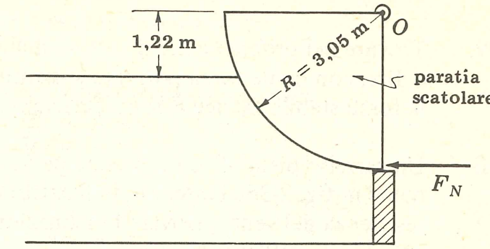


Fig. 2-31

2.22. Trovare in fig. 2-31 la forza dovuta all'acqua che agisce sulla paratia scatolare dalla forma di un quarto di cilindro, lunga 9,10 m e dal peso nel nostro caso trascurabile. Calcolare la forza nel punto O e nel punto inferiore della paratia.

2.23. In fig. 2-32 un oggetto dal peso specifico di 0,5 galleggia in un recipiente d'acqua; se a quest'ultimo viene impressa un'accelerazione verso l'alto di 3,05 m/s^2, che posizione assumerà l'oggetto rispetto alla superficie liquida?

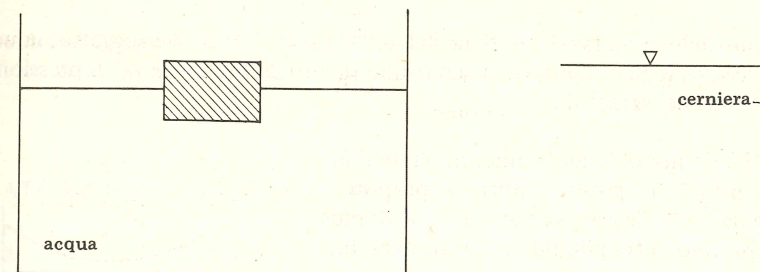


Fig. 2-32

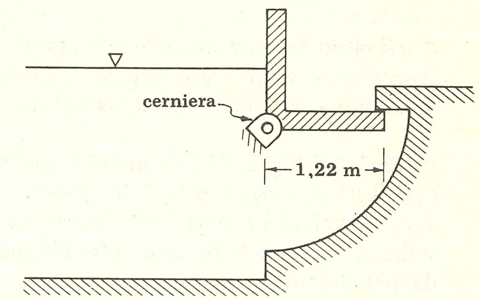


Fig. 2-33

2.24. Di quale altezza sopra la cerniera dovrà salire l'acqua in fig. 2-33 perché la paratia ad L si apra automaticamente?

2.25. Un tubo ad U ruota attorno alla retta AB come in fig. 2-34; la velocità angolare è di un giro al secondo. L'estremità C è chiusa. Trovare le pressioni in C, D, E.

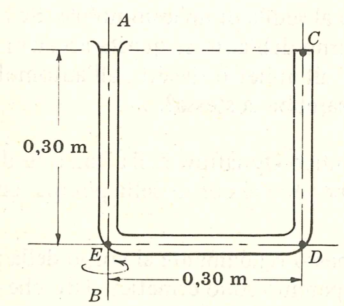


Fig. 2-34

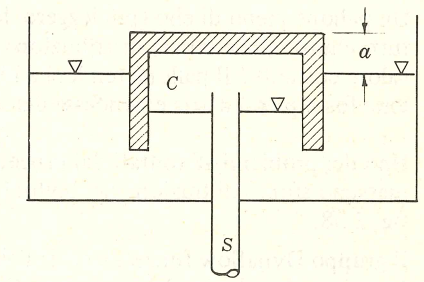


Fig. 2-35

2.26. Per misurare delle pressioni si può usare un tipo di manometro piuttosto nuovo, che risulta più sensibile del modello normale con tubo ad U. Esso è costituito da una tazza capovolta a pareti spesse e diritte che galleggia sul liquido; la pressione da misurare arriva attraverso un tubo S alla camera chiusa C, costituita dalla tazza capovolta e dal liquido. Il tutto è contenuto in un recipiente aperto all'atmosfera. Come misura della pressione si usa la distanza a tra il fondo della tazza e il pelo libero dell'acqua; qual è la sensibilità del manometro, cioè la variazione di a che corrisponde ad una variazione di pressione?

2.27. Riesaminare i problemi 2.8 e 2.9 nel caso in cui la paratia, in lastra d'acciaio da 6 mm, sia dotata di peso proprio.

2.28. Riesaminare i problemi 2.7 e 2.8 nel caso in cui sul lato destro della paratia esista dell'acqua per un'altezza di 60 cm.

2.29. Trovare nel problema 2.7 il vettore della forza risultante, dovuta alla pressione agente sulla paratia; vale a dire, con quale forza potremo sostituire l'azione dell'acqua dal momento che le reazioni alla cerniera e la forza stabilizzatrice F sono determinate da detto vettore?

2.30. Un carrello pieno d'acqua scende per un piano inclinato come in fig. 2-36. Trascurando l'attrito delle ruote e la resistenza del vento, trovare l'inclinazione assunta dal pelo libero dell'acqua.

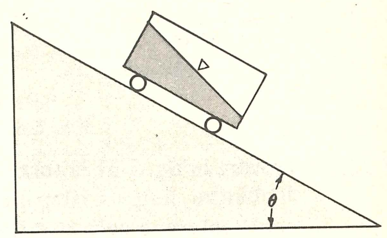


Fig. 2-36

2.31. Un cilindro verticale, con un coperchio a chiusura ermetica e completamente pieno d'acqua, ruota attorno al proprio asse con velocità angolare ω; come sarà all'interno la distribuzione delle pressioni? Tramite un forellino nel coperchio, c'è comunicazione con l'atmosfera.

2.32. Se il cilindro del problema 2.31 ruota in un campo a gravità zero, quale risulta la distribuzione di pressione nell'acqua?

2.33. Il serbatoio del combustibile di un razzo contiene del liquido a densità ρ ed è soggetto, in un campo a gravità zero, ad un'accelerazione costante a. Quale risulta in esso la distribuzione di pressione? Spiegare se ha importanza la forma del serbatoio.

2.34. Il cilindro di fig. 2-37 è riempito da due liquidi non miscibili di densità ρ_1 e ρ_2, con $\rho_2 > \rho_1$, e ruota intorno al proprio asse con velocità angolare ω. Trovare la distribuzione di pressione, la forma dell'interfaccia tra i liquidi, la forma assunta dal pelo libero.

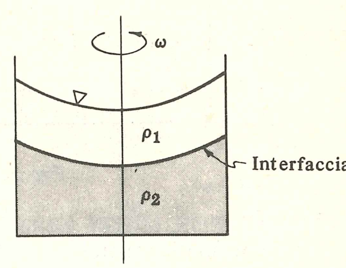


Fig. 2-37

2.35. Ha importanza la forma del tubo ad U nel problema 2.11? Quali parametri ne influenzano il comportamento?

2.36. Cosa accade nel problema 2.12 se il valore di a_x aumenta? Aumentando a_x si può vuotare completamente il serbatoio?

2.37. Un pallone pieno di elio (più leggero dell'aria) è assicurato al sedile di un'automobile. Se i finestrini sono tutti chiusi, quale sarà la distribuzione di pressione all'interno dell'auto se questa accelera in avanti di un valore costante? Il pallone tenderà ad inclinarsi in avanti o all'indietro rispetto all'automobile? Se il pallone fosse pieno d'aria e pendesse dal soffitto, la risposta sarebbe la stessa?

2.38. Uno dei problemi affrontati dai progettisti del giunto idraulico Dynaflow della Buick fu di trovare il massimo sforzo di trazione nei bulloni che collegano il coperchio al corpo della pompa, come si vede in fig. 2-38.

Il gruppo Dynaflow funziona così: l'albero motore è connesso rigidamente al corpo della pompa e le impartisce la velocità del motore ω. Corpo di pompa e coperchio sono ermetici, dato che l'albero d'uscita, rotante ad una velocità minore o uguale a quella del corpo di pompa, è dotato di premistoppa. Il corpo viene mantenuto pieno d'olio ad una pressione di lavoro costante per mezzo di una pompa ausiliaria, collegata al corpo stesso all'altezza del mozzo.

All'interno del corpo di pompa sono riportate delle palette radiali (la pompa) che spingono l'olio verso lo statore e la turbina (non riportati in figura), accoppiata quest'ultima all'albero in uscita.

Che sforzo di trazione ci si può aspettare in un bullone del coperchio? Il diametro del corpo è di D metri, la sua velocità angolare di ω radianti al secondo.

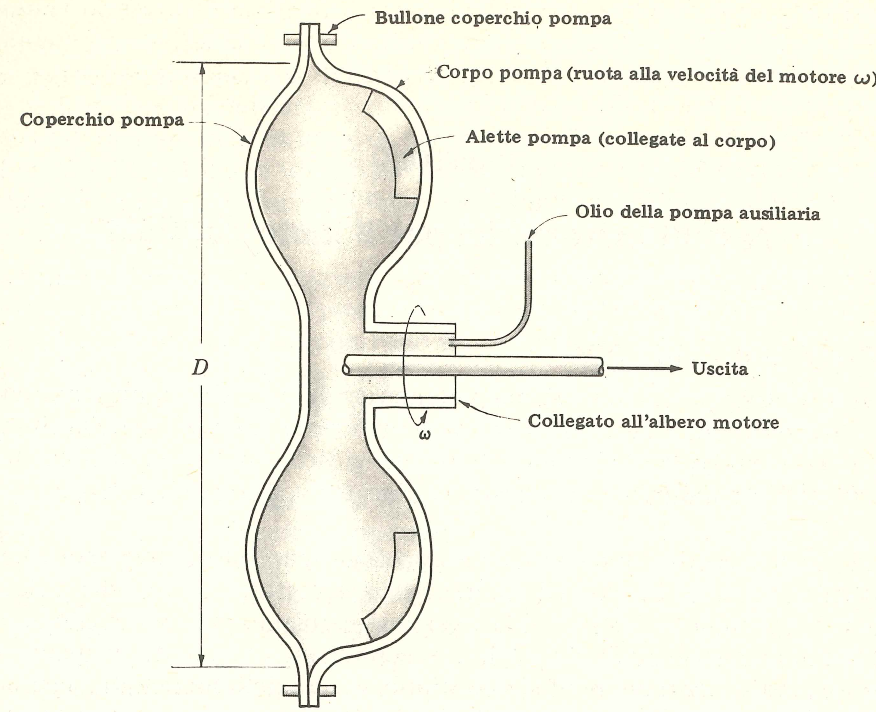


Fig. 2-38

NOMENCLATURA USATA NEL CAPITOLO 2

a	=	accelerazione
F	=	forza
g	=	accelerazione di gravità
h	=	altezza, o battente del fluido
p	=	pressione
R	=	costante dei gas
T	=	temperatura
γ	=	peso specifico = ρg
ρ	=	densità
ω	=	velocità angolare

CAPITOLO 3

Modelli matematici per il moto dei fluidi

3.1 INTRODUZIONE E METODO

In questo capitolo porremo in forma matematica dei modelli rappresentativi del moto dei fluidi. Dovremo sempre ricordare che si tratta di mere approssimazioni della situazione reale, ed è essenziale rendersi conto delle limitazioni e del giusto uso delle equazioni che vedremo. Ricaveremo i modelli matematici, mettendone in evidenza il significato fisico.

Un fluido reale è costituito da molecole, con degli spazi vuoti intermedi; in genere tuttavia conviene, all'atto di costruire il modello matematico, accettare l'ipotesi che il fluido sia un mezzo continuo, un "continuo". Anche noi faremo così: abbiamo già cominciato ad allontanarci dalla realtà, e stiamo costruendo un modello. Accenneremo che mentre la maggior parte dei fluidi possono essere studiati col modello continuo, dei modelli matematici che tengono conto del comportamento statistico delle particelle fluide singole sono stati sviluppati, e sono necessari, nello studio dei gas rarefatti. Nei testi di Chapman-Cowling (rif. 3, pag. 47) e di Curtiss-Bird (rif. 4, pag. 47) si trovano degli esempi dello studio particellare del moto dei fluidi.

Ricaveremo prima le equazioni fondamentali in forma integrale per un volume di controllo; applicandole poi ad un volume elementare otterremo le equazioni differenziali del moto dei fluidi. Come accennavamo nel capitolo 1, abbiamo nel moto dei fluidi cinque variabili fondamentali: tre componenti di velocità e due proprietà termodinamiche. Vi sono dunque cinque equazioni fondamentali per descrivere il moto: le tre componenti nell'equazione della quantità di moto, l'equazione di continuità e l'equazione dell'energia. Quest'ultima in genere resta a parte nel moto incompressibile, essendo qui costante la densità. Nel moto turbolento la situazione è in un certo modo più complessa, e in genere non si può sviluppare un ben determinato assieme di equazioni; non discuteremo le equazioni di questo moto particolare fino al capitolo 9. Si potranno introdurre delle proprietà termodinamiche addizionali con l'aiuto di alcune equazioni intrinseche, come per esempio un'equazione di stato.

3.2 EQUAZIONI INTEGRALI

Nello studio del moto dei fluidi ci occupiamo di quattro leggi fondamentali:

(*a*) Conservazione della massa
(*b*) Seconda legge della dinamica, o di Newton
(*c*) Conservazione dell'energia (primo principio della termodinamica)
(*d*) Secondo principio della termodinamica.

Leggi che valgono per una determinata quantità di materia, o sistema, che pur sottoposta a una variazione di condizioni conserva la propria identità. In effetti, se non viene bene identificato il sistema, non ha significato applicare le leggi fondamentali.

Di solito non conviene, nell'analisi del moto dei fluidi, identificare e seguire delle quantità materiali ben individuate. Si usa piuttosto adottare una schematizzazione di lavoro, identificando nello spazio una regione, o volume, ben definiti: si tratta del volume di controllo. Le quattro leggi fondamentali tuttavia non si applicano a volumi, ma a delle quantità di materia: il nostro scopo immediato è perciò di ricavare delle equazioni, per i volumi di controllo, da espressioni già note. Ci chiediamo allora: quali saranno in un tempo qualsiasi le proprietà del fluido entro il volume di controllo assegnato, indipendentemente dal fatto che il fluido racchiuso in detto volume di controllo cambia continuamente?

Passiamo allora a sviluppare le equazioni integrali del moto dei fluidi. Ne presentiamo la deduzione passo per passo, in modo che si possa meglio comprenderle all'atto di applicarle a situazioni fisiche. Le equazioni per il volume di controllo vengono ricavate dalle note leggi fondamentali secondo un metodo generale, con leggere modifiche dovute alle diverse grandezze fisiche interessate. Sviluppate le equazioni, esse saranno applicate per risolvere i problemi pratici che si presentano nel moto dei fluidi.

(*a*) **Conservazione della massa.** Fissiamo la nostra attenzione su un campo di velocità, rappresentato dalle linee di corrente di fig. 3-1; consideriamo la quantità di materia che al tempo t è racchiusa nella linea continua. Al tempo $t + \Delta t$ il confine del sistema ha una nuova collocazione fisica, rappresentata dalla linea tratteggiata. Abbiamo delle regioni indicate con A, B, C: il sistema occupa A al tempo t, B ed A-C al tempo $t + \Delta t$. Se m, con gli opportuni indici, rappresenta la massa contenuta nelle diverse regioni negli istanti successivi

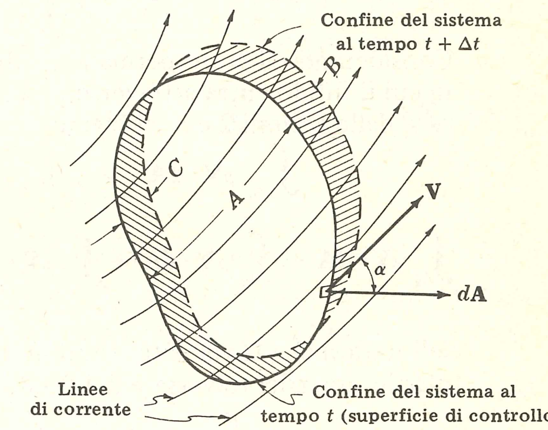


Fig. 3-1. Sistema in moto attraverso un volume di controllo.

$$m_A(t) = m_A(t+\Delta t) - m_C(t+\Delta t) + m_B(t+\Delta t)$$

Riordinando e dividendo per Δt,

$$\frac{m_A(t+\Delta t) - m_A(t)}{\Delta t} = \frac{m_C(t+\Delta t) - m_B(t+\Delta t)}{\Delta t}$$

calcolando il limite per $\Delta t \to 0$, l'elemento di sinistra diventa

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{m_A(t+\Delta t) - m_A(t)}{\Delta t} = \frac{\partial}{\partial t}(m)_{\text{C.V.}} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{C.V.}} \rho \, d\mathcal{V}$$

in cui ρ è la densità, $\mathcal{V}$ il volume, C.V. il volume di controllo, fisso nello spazio e limitato dalla superficie di controllo C.S. L'elemento di destra dell'equazione è

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left\{ \frac{m_C(t+\Delta t)}{\Delta t} - \frac{m_B(t+\Delta t)}{\Delta t} \right\} = \dot{m}_{\text{ingr}} - \dot{m}_{\text{usc}}$$

che diventa

$$\dot{m}_{\text{ingr}} - \dot{m}_{\text{usc}} = \int_{A_{\text{ingr}}} \rho V \cos\alpha \, dA - \int_{A_{\text{usc}}} \rho V \cos\alpha \, dA = -\int_{\text{C.S.}} \rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{A}$$

in cui $\dot{m}_{\text{ingr}}$ ed $\dot{m}_{\text{usc}}$ rappresentano la portata in massa che entra ed esce dal volume di controllo; $\mathbf{V}$ è il vettore velocità. V è il modulo del vettore velocità, α l'angolo compreso tra il vettore velocità e la normale diretta verso l'esterno. Abbiamo allora l'equazione di continuità per il volume di controllo:

$$\int_{\text{C.S.}} \rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{A} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{C.V.}} \rho \, d\mathcal{V} \qquad (3.1)$$

Equazione che rappresenta in forma integrale l'equazione di continuità, e fisicamente vuol dire che la portata in massa che esce attraverso la superficie di controllo è uguale alla variazione negativa di massa compresa nel volume di controllo. Esamineremo detta equazione considerandone prima delle semplificazioni di valore generale, poi alcune applicazioni pratiche.

Essendo fissato il volume di controllo, il membro a destra della (*3.1*) è uguale a zero se il moto è permanente $(\partial\rho/\partial t = 0)$, dandoci

$$\int_{\text{C.S.}} \rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{A} = 0 \qquad (3.2)$$

E nel moto incompressibile abbiamo

$$\int_{\text{C.S.}} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{A} = 0$$

Considerando il moto permanente di fig. 3-2, in cui il fluido entra attraverso la sezione 1 ed esce dalle sezioni 2 e 3, abbiamo

$$\int_{\text{C.S.}} \rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{A} = 0$$

$$\int_{A_2} \rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{A} + \int_{A_3} \rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{A} + \int_{A_1} \rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{A} = 0$$

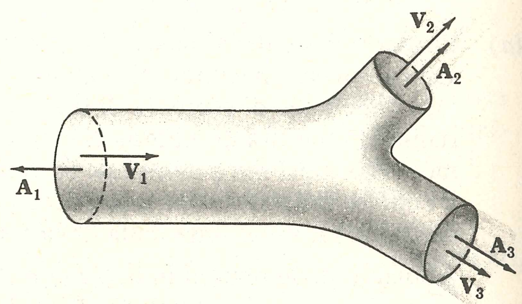


Fig. 3-2. Continuità in una diramazione.

Nell'ipotesi che la velocità risulti normale a tutte le superfici traversate dal fluido,

$$\int_{A_2} \rho_2 V_2 \, dA + \int_{A_3} \rho_3 V_3 \, dA - \int_{A_1} \rho_1 V_1 \, dA = 0$$

Se densità e velocità sono uniformi nelle rispettive sezioni,

$$\rho_2 V_2 A_2 + \rho_3 A_3 V_3 - \rho_1 A_1 V_1 = 0 \qquad (3.3)$$

Per un tubo semplice l'equazione diventa

$$\rho_2 A_2 V_2 = \rho_1 A_1 V_1 \qquad (3.4)$$

Le ipotesi che ci hanno portato all'equazione (*3.4*) sono: (*a*) moto permanente, (*b*) velocità normali alle superfici, (*c*) velocità e densità costanti nelle rispettive sezioni, (*d*) una entrata ed una uscita per il volume di controllo.

(*b*) **Quantità di moto.** Cerchiamo adesso l'equazione della quantità di moto per il volume di controllo; nel moto dei fluidi, si tratta di una tra le relazioni matematiche più importanti. Essa ci permette di studiare i problemi che riguardano l'azione dei fluidi su superfici fisse o su altri fluidi: per esempio la forza che agisce sul gomito di una tubazione, la spinta di un motore a getto, la portanza e la resistenza sull'ala di un velivolo, eccetera.

La forza F che agisce su una particella, o su un sistema di particelle di massa prestabilita, è data dalla seconda legge di Newton:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{M}}{dt} \qquad (3.5)$$

in cui M è la quantità di moto lineare totale del sistema. Se la forza resta costante in un tempo Δt potremo scrivere

$$\mathbf{F}\,\Delta t = \Delta\mathbf{M} \qquad (3.6)$$

Il membro di destra dell'equazione (*3.6*) diviene, riferendoci alla fig. 3-1,

$$\Delta\mathbf{M} = \mathbf{M}_A(t+\Delta t) - \mathbf{M}_C(t+\Delta t) + \mathbf{M}_B(t+\Delta t) - \mathbf{M}_A(t)$$

Riordinando e dividendo per Δt,

$$\frac{\Delta\mathbf{M}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{M}_A(t+\Delta t) - \mathbf{M}_A(t)}{\Delta t} + \frac{\mathbf{M}_B(t+\Delta t) - \mathbf{M}_C(t+\Delta t)}{\Delta t} \qquad (3.7)$$

Prendendo il limite dell'equazione (*3.7*) al tendere di Δt a zero, il primo termine a destra diventa

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\mathbf{M}_A(t+\Delta t) - \mathbf{M}_A(t)}{\Delta t} = \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{M})_{\text{C.V.}} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{C.V.}} \rho \mathbf{V} \, d\mathcal{V}$$

e il secondo

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{\mathbf{M}_B(t+\Delta t) - \mathbf{M}_C(t+\Delta t)}{\Delta t}\right] = \lim_{\Delta t\to 0}\left\{\frac{\left[\sum_B \Delta\mathbf{M}(t+\Delta t)\right]_B}{\Delta t} - \frac{\left[\sum_C \Delta\mathbf{M}(t+\Delta t)\right]_C}{\Delta t}\right\}$$

$$= \sum_B \Delta\dot{\mathbf{M}} - \sum_C \Delta\dot{\mathbf{M}} = \left[\sum \Delta\dot{m}\mathbf{V}\right]_{\text{usc}} - \left[\sum \Delta\dot{m}\mathbf{V}\right]_{\text{ingr}}$$

$$= \int_{\text{C.S.}} \mathbf{V}\rho\mathbf{V} \cdot d\mathbf{A}$$

in cui $\sum_B \Delta\mathbf{M}(t+\Delta t)$ èlla quantità di moto che compete alla massa che nel tempo Δt ha attraversato il confine verso la regione *B*. $\sum_B \Delta\dot{\mathbf{M}}$ è la rapidità con cui nel tempo *t* la quantità di moto attraversa la superficie verso la regione *B*. L'equazione (*3.6*) diventa allora

$$\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{C.V.}} \mathbf{V}\rho \, d\mathcal{V} + \int_{\text{C.S.}} \mathbf{V}\rho\mathbf{V} \cdot d\mathbf{A} \qquad (3.8)$$

La forza complessiva *F* è costituita dalla forza di contatto $\mathbf{F}_s$ (pressione e taglio) e dalla forza per unità di volume, o di massa, **B**. L'equazione della quantità di moto per un volume di controllo diventa cosi

$$\mathbf{F}_s + \int_{\text{C.V.}} \mathbf{B} \, d\mathcal{V} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{C.V.}} \mathbf{V}\rho \, d\mathcal{V} + \int_{\text{C.S.}} \mathbf{V}\rho\mathbf{V} \cdot d\mathbf{A} \qquad (3.9)$$

Si deve sottolineare che questa equazione è valida solo se il sistema di riferimento è in moto senza accelerazione; la forma consueta delle leggi di Newton è infatti valida solo con questa ipotesi[1].

Se il moto è permanente e le forze di massa trascurabili, l'equazione (*3.9*) diventa

$$\mathbf{F}_s = \int_{\text{C.S.}} \mathbf{V}\rho\mathbf{V} \cdot d\mathbf{A} \qquad (3.10)$$

Inoltre se assumiamo che densità e velocità siano costanti sulle aree attraverso le quali il fluido esce dal volume di controllo, parlando di un ingresso 1 e di un'uscita 2 avremo

$$\sum F_x = \dot{m}(V_{x_2} - V_{x_1}), \quad \sum F_y = \dot{m}(V_{y_2} - V_{y_1}), \quad \sum F_z = \dot{m}(V_{z_2} - V_{z_1})$$

(*c*) **Momento della quantità di moto.** Piuttosto che ricavare in modo rigoroso l'equazione del momento della quantità di moto, la presentiamo com'è e ne discutiamo il significato fisico. I passaggi si possono trovare nei testi di rif. 2 o 13, pag. 47.

Scriviamo di nuovo l'equazione della quantità di moto lineare (*3.9*):

$$\mathbf{F}_s + \int_{\text{C.V.}} \mathbf{B} \, d\mathcal{V} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{C.V.}} \dot{\mathbf{V}}\rho \, d\mathcal{V} + \int_{\text{C.S.}} \mathbf{V}\rho\mathbf{V} \cdot d\mathbf{A}$$

[1] Per il caso di un volume di controllo che sia dotato di accelerazione senza rotazione, al primo membro dell'equazione (*3.9*) viene aggiunto il termine $-m\ddot{\mathbf{R}}$, in cui *m* è la massa totale compresa nel volume di controllo e $\ddot{\mathbf{R}}$ è l'accelerazione relativa al sistema inerziale di riferimento. Il calcolo dell'equazione completa si può trovare nel riferimento 13 di pag. 47.

Scriviamo allora l'equazione (*3.9*), moltiplicandone scalarmente ogni vettore per un vettore posizione **r**:

$$\int_{C.S.} \mathbf{r}\times d\mathbf{F}_s + \int_{C.V.} \mathbf{r}\times \mathbf{B}\, d\mathcal{V} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{C.V.} \mathbf{r}\times \mathbf{V}\rho\, d\mathcal{V} + \int_{C.S.} \mathbf{r}\times \mathbf{V}\rho \mathbf{V}\cdot d\mathbf{A} \qquad (3.11)$$

e questa è l'equazione del momento della quantità di moto. Troviamo adesso il significato fisico di ogni singolo termine, riferendoci alla fig. 3-3.

La funzione integranda del primo, $\mathbf{r}\times d\mathbf{F}_s$, costituisce il momento della forza $d\mathbf{F}_s$, sulla superficie di controllo, attorno all'origine. L'integranda del secondo termine della (*3.11*) è il momento attorno all'origine della forza di massa che agisce sull'elementino di massa $d\mathcal{V}$. L'integranda del terzo è il momento della quantità di moto dell'elementino $\rho\, d\mathcal{V}$. Con l'integrazione ricaviamo il momento complessivo della quantità di moto della massa compresa entro il volume di controllo. L'ultimo termine è la portata con cui il momento di quantità di moto esce attraverso la superficie di controllo.

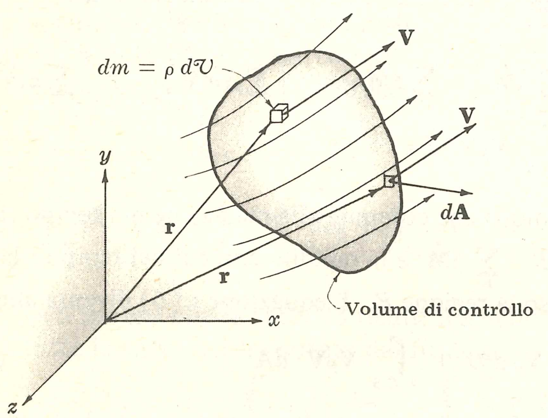


Fig. 3-3. Momento della quantità di moto in un volume di controllo.

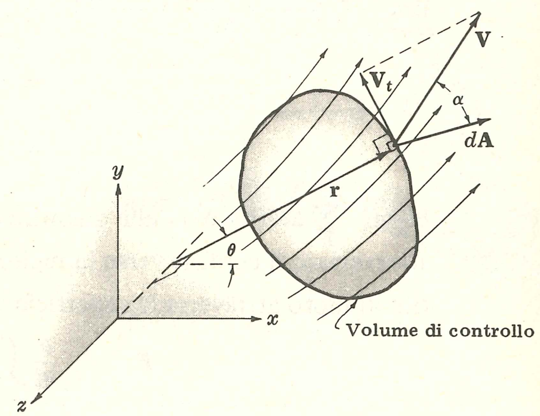


Fig. 3-4. Momento della quantità di moto attorno all'asse delle *z*.

Per le applicazioni della (*3.11*) se ne usano le componenti scalari. Se per esempio dobbiamo scriverla in proiezione sulle *z* che vediamo in fig. 3-4 avremo, se il moto è permanente e le forze di massa sono trascurabili,

$$T_z = \int_{C.S.} (\mathbf{r}\times\mathbf{V})_z(\rho\mathbf{V}\cdot d\mathbf{A}) \qquad (3.12)$$

in cui T_z è il momento torcente netto che il volume di controllo risente attorno alle *z*, e

$$(\mathbf{r}\times\mathbf{V})_z = rV_t, \qquad \rho\mathbf{V}\cdot d\mathbf{A} = \rho V\cos\alpha\, dA$$

in cui V_t è la componente del vettore velocità perpendicolare all'asse delle *z*, e α è l'angolo compreso tra il vettore velocità e l'area $d\mathbf{A}$. Allora

$$T_z = \int_{C.S.} \rho r V_t V\cos\alpha\, dA \qquad (3.13)$$

Poniamo ora che tutta la portata che entra nel volume di controllo passi per un'area A_1, uscendo attraverso un'area A_2, e che per entrambe siano costanti ρ, V, $\cos\alpha$. Siano $r_2 V_{t2}$ e $r_1 V_{t1}$ i valori medi di rV_t rispettivamente su A_2 ed A_1:

$$r_2 V_{t2} = \frac{1}{A_2}\int_{A_2} rV_t\, dA, \qquad r_1 V_{t1} = \frac{1}{A_1}\int_{A_1} rV_t\, dA$$

Se Q è la portata in volume, l'equazione di continuità porge

$$\rho_1 A_1 V_1\cos\alpha_1 = \rho_2 A_2 V_2\cos\alpha_2 = \rho_1 Q_1$$

L'equazione (*3.13*) diventa

$$T_z = \rho_1 Q_1 (r_2 V_{t2} - r_1 V_{t1}) \qquad (3.14)$$

La (*3.14*) si può applicare così com'è al rotore di una turbomacchina, perché il moto assoluto all'interno del rotore è ciclico, e si può assumere con buona approssimazione che ρ, V e $\cos\alpha$ siano costanti nella sezione d'entrata 1 e in quella d'uscita 2 (vedi figg. 3-5 e 3-6). Il simbolo **v** è riferito al rotore (velocità relativa), **V** indica al solito la velocità relativa alla terra (velocità assoluta). In figura, per chiarezza, viene indicata solo una paletta.

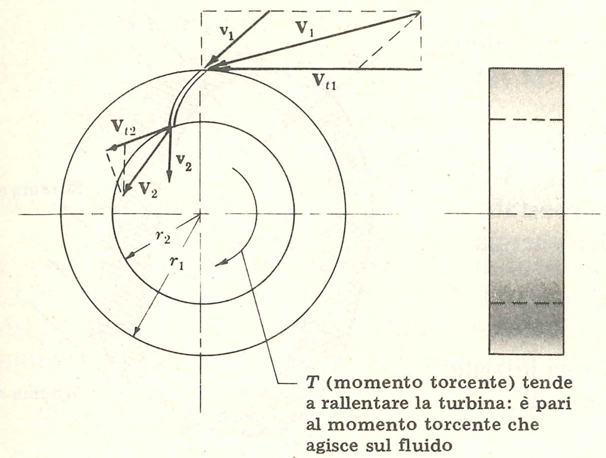


Fig. 3-5. Diagrammi di velocità per la girante di una turbina radiale.

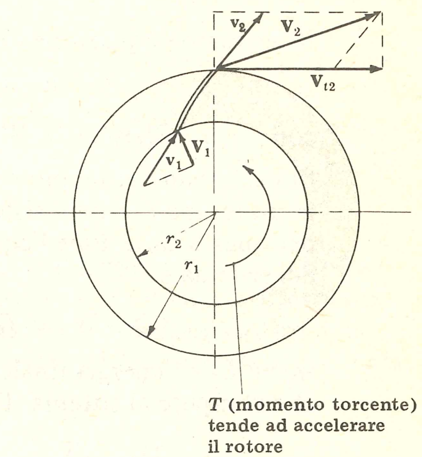


Fig. 3-6. Diagrammi di velocità per una girante di pompa radiale.

Trascurando l'attrito ai cuscinetti, la resistenza del fluido sulla parte esterna del rotore, gli sforzi di taglio nel fluido alle sezioni 1 e 2, il momento torcente esterno T che agisce sull'albero è uguale al momento torcente esterno agente su uno dei due sistemi: per la turbina T ha senso orario, per il compressore antiorario. Per la prima avremo allora

$$T = \rho_1 Q_1 (r_1 V_{t1} - r_2 V_{t2}) \qquad (3.15)$$

e per il secondo, che può anche essere la girante di una pompa, con V_{t1} di solito uguale a zero,

$$T = \rho_1 Q_1 (r_2 V_{t2} - r_1 V_{t1}) \qquad (3.16)$$

Le turbomacchine che abbiamo considerato qui lavorano con moto radiale: il moto attraverso il rotore procede in direzione radiale, cioè normale all'asse di rotazione. Si possono però avere anche turbomacchine con moto assiale, che attraversa cioè il rotore in senso parallelo all'asse di rotazione, o misto: un moto intermedio tra assiale e radiale.

(*d*) **Energia.** L'espressione matematica del primo principio della termodinamica[2] è

$$Q - W = \Delta E \qquad (3.17)$$

in cui
- Q = calore aggiunto al sistema
- W = lavoro compiuto dal sistema
- ΔE = variazione nell'energia del sistema.

Come si è già detto nel paragrafo precedente, sottolineiamo che anche questa legge vale per un sistema; anche qui ci tocca allora trovarne le espressioni matematiche per un volume di controllo.

[2] Per le definizioni di calore e lavoro si possono consultare i riferimenti 6, 7, 18 di pag. 47.

Calore e lavoro nell'equazione (*3.17*) sottintendono un'interazione del sistema con altri; l'energia è comunque associata alla massa del sistema, ed è di solito divisa in tre parti:

$$E = U + \tfrac{1}{2}mV^2 + mgz$$

in cui U = energia interna, associata al comportamento molecolare e atomico

$\tfrac{1}{2}mV^2$ = energia cinetica

mgz = energia potenziale, dipendente dalla posizione nel campo gravitazionale terrestre.

Riferiremo l'equazione (*3.17*) alla massa unitaria,

$$q - w = \Delta e \qquad (3.18)$$

con $q = Q/m,\ w = W/m,\ e = E/m.$

Consideriamo al tempo t il sistema di fig. 3-7; in un tempo $t + \Delta t$ il sistema si sarà spostato; per questa variazione l'equazione dell'energia del sistema è

$$Q - W = E_f - E_i$$

in cui E_f è l'energia finale, E_i l'energia iniziale che compete al sistema. Dividendo per Δt,

$$\frac{Q}{\Delta t} - \frac{W}{\Delta t} = \frac{E_f - E_i}{\Delta t} \qquad (3.19)$$

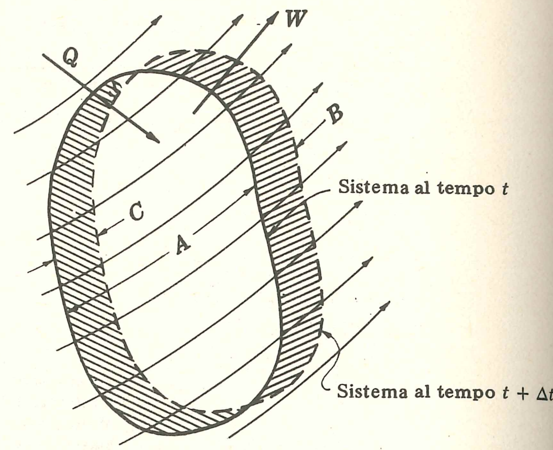


Fig. 3-7. Volume di controllo per il bilancio dell'energia

Calcoliamo il secondo membro dell'equazione:

$$\frac{E_f - E_i}{\Delta t} = \frac{E_A(t+\Delta t) - E_C(t+\Delta t) + E_B(t+\Delta t) - E_A(t)}{\Delta t}$$

$$= \frac{E_A(t+\Delta t) - E_A(t)}{\Delta t} + \frac{E_B(t+\Delta t) - E_C(t+\Delta t)}{\Delta t}$$

E al tendere di Δt a zero il primo elemento a destra diventa

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{E_A(t+\Delta t) - E_A(t)}{\Delta t} = \frac{\partial}{\partial t}(E)_{\text{C.V.}} = \frac{\partial}{\partial t}\int e\,dm = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{C.V.}} e\rho\, d\mathcal{V}$$

E l'ultimo

$$\frac{E_B(t+\Delta t) - E_C(t+\Delta t)}{\Delta t} = \frac{(\Sigma \Delta m\, e)_B|_{t+\Delta t}}{\Delta t} - \frac{(\Sigma \Delta m\, e)_C|_{t+\Delta t}}{\Delta t}$$

nel quale la sommatoria rappresenta la massa che attraversa la superficie, Δm è la massa tipica, e è l'energia immagazzinata, associata alla massa Δm. Per Δt che tende a zero l'ultima equazione diviene

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{E_B(t+\Delta t) - E_C(t+\Delta t)}{\Delta t} = \int_{\text{usc}} e\,d\dot{m} - \int_{\text{ingr}} e\,d\dot{m} = \int_{\text{C.S.}} e\rho\mathbf{V}\cdot d\mathbf{A}$$

E abbiamo così

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{E_f - E_i}{\Delta t} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{C.V.}} e\rho\,d\mathcal{V} + \int_{\text{C.S.}} e\rho\mathbf{V}\cdot d\mathbf{A}$$

Sul confine del sistema si può avere del lavoro, compiuto da sforzi normali e tangenziali. Gli sforzi normali sono dovuti alla pressione idrostatica, e si intendono come lavoro del fluido, effettuato su un elementino $(\Delta m)_B$ per esempio, all'uscire dalla regione A nel tempo Δt: è un lavoro $p\,dA\,\Delta x$. Però $dA\,\Delta x$ è il volume dell'elementino di massa Δm e si può scrivere $(\Delta m)_B/\rho$. Perciò il lavoro del fluido sia all'uscita che all'entrata vale

$$\left(\frac{dW}{dt}\right)_{\substack{\text{lavoro}\\ \text{del fluido}}} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta W}{\Delta t}\right)_{\substack{\text{lavoro}\\ \text{del fluido}}} = \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\Sigma(p/\rho)(\Delta m)_B|_{t+\Delta t}}{\Delta t} - \frac{\Sigma(p/\rho)(\Delta m)_C|_{t+\Delta t}}{\Delta t}\right]$$

$$= \int_{\text{C.S.}} (p/\rho)\rho\mathbf{V}\cdot d\mathbf{A}$$

L'equazione dell'energia diventa

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dW_S}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{C.V.}} e\rho\,d\mathcal{V} + \int_{\text{C.S.}} (e + p/\rho)\rho\mathbf{V}\cdot d\mathbf{A} \qquad (3.20)$$

in cui

$$e = u + \tfrac{1}{2}V^2 + gz$$

e (dW_S/dt) è la variazione nel tempo di tutti i lavori, eccetto il lavoro del fluido. Nella (*3.20*) vediamo che la variazione del calore aggiunto al sistema meno il lavoro effettuato dal medesimo (con esclusione del lavoro del fluido) è uguale alla variazione dell'energia immagazzinata nel volume di controllo, più la portata in uscita dell'energia immagazzinata e del lavoro del fluido.

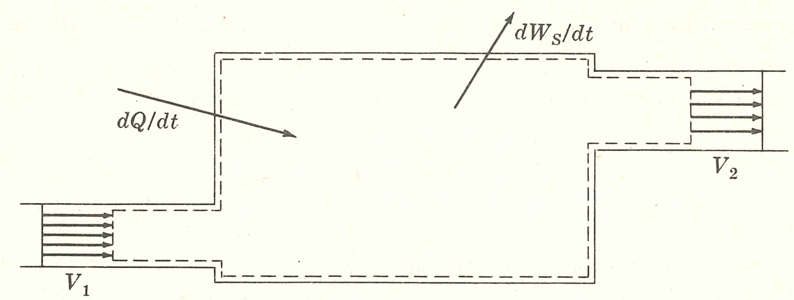


Fig. 3-8. Schema di flusso che comprende calore e lavoro.

Consideriamo il moto permanente ad una dimensione nello schema di fig. 3-8, per il quale il lavoro di taglio presente sulla sezione dell'albero rotante, lavoro all'albero, in tutti i punti del confine assegnato è zero, essendo comunque la velocità o nulla, o normale alla forza di taglio stessa. Allora dalla (*3.20*) avremo

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dW_S}{dt} = \int_{A_1+A_2}\left(\frac{p}{\rho} + u + \frac{V^2}{2} + gz\right)\rho V\,dA$$

Il moto è unidimensionale: p, V, u, ρ risultano uniformi su A_1 e A_2. Trascurando inoltre le variazioni di quota z nelle aree considerate, avremo

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dW_S}{dt} = \left(\frac{p_2}{\rho_2} + u_2 + \frac{V_2^2}{2} + gz_2\right)\rho_2 A_2 V_2 - \left(\frac{p_1}{\rho_1} + u_1 + \frac{V_1^2}{2} + gz_1\right)\rho_1 A_1 V_1$$

E dall'equazione di continuità abbiamo, per un moto permanente unidimensionale,

$$\rho_1 A_1 V_1 = \rho_2 A_2 V_2 = \frac{dm}{dt} = \text{portata in massa}$$

che per sostituzione nell'equazione dell'energia ci dà

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dW_S}{dt} = \left[\left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1}\right) + (u_2 - u_1) + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + g(z_2 - z_1)\right]\frac{dm}{dt} \qquad (3.21)$$

Scrivendo la (*3.21*) in modo che ogni termine risulti riferito all'unità di massa del fluido in moto,

$$q - w_S = \left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1}\right) + (u_2 - u_1) + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) \qquad (3.22a)$$

e questo è il solito bilancio dell'energia che si dà in termodinamica per un moto permanente unidimensionale.

Riordinando la (*3.22a*) e accettando l'ipotesi di moto incompressibile,

$$-w_S = \frac{p_2 - p_1}{\rho} + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + (u_2 - u_1 - q)$$

Nella maggior parte delle correnti reali le quantità che compaiono nell'equazione precedente si possono misurare direttamente, tranne l'energia interna e la trasmissione di calore. Questo vale specialmente per il moto dei liquidi nei tubi. Allora il procedimento è di definire

$$gH_L = u_2 - u_1 - q$$

in modo che

$$-w_S = \frac{p_2 - p_1}{\rho} + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + gH_L \qquad (3.22b)$$

in cui H_L è la "perdita di carico" e rappresenta una trasformazione di energia meccanica in energia termica. Il fluido infatti muovendosi attraverso una pompa o una tubazione risente di una sollecitazione a taglio, visto che le pareti tendono a trattenerlo con l'attrito e a variarne la configurazione. La temperatura sale allora oltre il valore che avrebbe in un moto senza attrito; aumentano allora sia il valore $u_2 - u_1$ che il calore trasferito all'ambiente circostante.

Per il moto senza attrito di un fluido incompressibile, con lavoro all'albero zero, la (*3.22b*) diventa

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho} + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) = 0 \qquad (3.22c)$$

essendo ora $H_L = 0$. Confronteremo quest'equazione con quella di Bernoulli, che ricaveremo più in là dall'equazione della quantità di moto. Veramente, possiamo dimostrare che $(u_2 - u_1 - q)$ è una perdita di carico solo confrontando la (*3.22a*) con il primo integrale dell'equazione del moto per un fluido incompressibile, uguale alla (*3.22b*), equazione di Bernoulli generale ottenuta direttamente dall'espressione della quantità di moto e discussa nel paragrafo 3.3*c*. E' importante rendersi conto che la (*3.22b*), diversamente dalla (*3.22a*), può essere ricavata solo dall'equazione della quantità di moto già detta. La (*3.22a*) è una equazione generale dell'energia per un moto compressibile, ma una volta che abbiamo detto che il moto è incompressibile e classificato in un unico gruppo il termine $(u_2 - u_1 - q)$ come una caduta, o perdita, senza attrito, abbiamo perduto ogni vera informazione di tipo termodinamico e ci resta solo un bilancio dell'energia meccanica, con in più l'equazione del moto. Per un moto incompressibile senza attrito la (*3.22c*) è uguale all'equazione fondamentale di Bernoulli, mentre l'ultimo elemento della (*3.22b*), $H_L = 0$, corrisponde al primo principio della termodinamica. Dunque $q - \Delta u = 0$ corrisponde, per una massa unitaria di fluido in moto, al suddetto primo principio, ed è indipendente dalla (*3.22c*).

Nell'equazione generale dell'energia (*3.22a*) sono contenuti sia il primo principio della termodinamica che un bilancio dell'energia meccanica; ricordare che quest'ultimo si esprime dicendo che la velocità con cui l'energia cinetica e potenziale aumentano è pari a quella con cui le forze di spostamento compiono lavoro, e si può ottenere dall'equazione della quantità di moto, in modo indipendente dal bilancio termodinamico noto come primo principio.

(*e*) **Secondo principio della termodinamica.** Per un volume di controllo, questo secondo principio viene delineato con lo stesso procedimento seguito per le altre leggi fondamentali; non seguiremo qui l'intera derivazione, visto che ci servono solo i risultati. Per chi volesse approfondire, sono utili i riferimenti 8, 10, 18 di pag. 47.

Per un sistema questo principio si enuncia così:

$$dS - \frac{dQ}{T} \geqq 0$$

(in cui S è l'entropia del sistema stesso): la variazione di entropia meno il calore trasferito al sistema, diviso per la temperatura, è uguale, o maggiore di zero. Procedendo come nel paragrafo precedente, troviamo la forma adatta al volume di controllo:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{c.v.}} s\rho \, d\mathcal{V} + \int_{\text{c.s.}} s\rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{A} - \int_{\text{c.s.}} \frac{\mathbf{q}}{T} \cdot d\mathbf{A} \geqq 0 \qquad (3.23)$$

in cui $\mathbf{q}$ è il vettore flusso di calore, velocità di trasferimento del calore nell'area unitaria. L'entropia specifica, cioè per unità di massa, è s.

Nell'ipotesi di fluido in moto permanente e adiabatico da un ingresso ad un'uscita (come per esempio in fig. 3-8), l'equazione (*3.23*) diventa

$$s_2 - s_1 \geqq 0$$

Se assumiamo inoltre che si tratta di un fenomeno reversibile,

$$s_2 - s_1 = 0$$

il che vale a dire che la trasformazione è isentropica.

L'entropia è una proprietà, collegata ad altre; questo secondo principio risulta particolarmente utile nello studio del moto dei gas.

3.3 EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Nel paragrafo precedente abbiamo usato le leggi fondamentali, valide per un sistema, per fissare delle equazioni integrali, applicabili ad un volume di controllo; ora le useremo per ricavare le equazioni differenziali della fluidodinamica. Anche se esistono diversi modi, tre sono i più usati. Prima di tutto, col calcolo vettoriale, da espressioni integrali si può passare formalmente a quelle differenziali. Non ci sono significati fisici da trovare, il procedimento è matematicamente rigoroso. Un secondo modo è di applicare le relazioni integrali ad un volume elementare, e ricavare le espressioni differenziali al tendere del volume a zero. Col terzo metodo si applicano poi le equazioni fondamentali del sistema direttamente a un volume elementare, ricavando naturalmente in questo modo, durante il calcolo, le espressioni integrali fondamentali per il volume medesimo.

Illustreremo qui i tre metodi, ricavando con il primo l'equazione differenziale della continuità, con il secondo l'equazione della quantità di moto, con il terzo l'equazione dell'energia.

Dobbiamo qui ricordare che le coordinate rappresentano per un punto lo spazio e il tempo, ma non indicano la posizione delle singole particelle. Chiediamoci allora: cosa diventano proprietà e velocità $\mathbf{V}$ in funzione di posizione e tempo? Per esempio, in coordinate cartesiane, $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ oppure $\mathbf{V} = \mathbf{V}(x, y, z, t)$ sono coordinate di campo, euleriane. Nella dinamica del corpo rigido si usano le lagrangiane, per le quali l'accelerazione è semplicemente $\ddot{\mathbf{r}}$, con $\mathbf{r}$ che indica la posizione in un corpo rigido di una particella, o di un punto fisso. Nella fluidodinamica si possono anche usare le coordinate lagrangiane, ma esse non risultano particolarmente utili, e si usano quasi sempre le euleriane. E' chiaro allora che in coordinate euleriane l'accelerazione non può essere $\ddot{\mathbf{r}}$: $\mathbf{r}$ è un punto fisso nello spazio, e le sue derivate non hanno senso. Però, nel momento in cui il fluido supera un qualsiasi punto in esame, esso risulta avere un'accelerazione, che si può scrivere in funzione della velocità del fluido; ne ricaveremo tra breve l'esatta espressione.

(*a*) **Continuità (conservazione della massa).** Cominciando dall'equazione (*3.1*),

$$\int_{\text{C.S.}} \rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{A} \;=\; -\frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{C.V.}} \rho \, d\mathcal{V} \qquad (3.1)$$

possiamo applicare formalmente il teorema di Gauss, trasformando il primo membro in un integrale di volume; la (*3.1*) allora si può scrivere

$$\int_{\text{C.V.}} \nabla \cdot (\rho \mathbf{V})\, d\mathcal{V} + \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{C.V.}} \rho \, d\mathcal{V} \;=\; \int_{\text{C.V.}} [\nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) + \partial\rho/\partial t]\, d\mathcal{V} \;=\; 0 \qquad (3.24)$$

Essendo arbitrario il volume di controllo, la funzione integranda dev'essere zero: otteniamo così la forma differenziale dell'equazione di continuità:

$$\partial\rho/\partial t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) \;=\; 0 \qquad (3.25)$$

che si ricava anche applicando direttamente la (*3.1*) ad un volume infinitesimo.

Nel moto permanente è $\partial\rho/\partial t = 0$ e abbiamo

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \qquad (3.26)$$

e nel moto incompressibile

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \qquad (3.27)$$

In coordinate cartesiane l'equazione di continuità diventa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) \;=\; 0 \qquad (3.28)$$

e nel moto incompressibile

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \;=\; 0 \qquad (3.29)$$

Nella notazione tensoriale cartesiana l'equazione di continuità diventa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) \;=\; 0 \qquad (3.30)$$

(*b*) **Equazione della quantità di moto.** Per ricavare questa applicheremo la forma integrale ad un volume elementare, in forma di cubo, in modo che il risultato sarà valido solo in coordinate cartesiane. L'espressione vettoriale generale si ricava meglio con il metodo formale matematico, e perciò qui ne daremo solo l'espressione finale. Va da sé che, con l'opportuna scelta di un elementino di riferimento, si possono ricavare delle equazioni in qualsiasi sistema di riferimento: cilindrico, sferico, ecc.

Prima di dedurre l'equazione, rivediamo un momento il concetto di tensore degli sforzi: nel bilancio della quantità di moto dovremo tener conto di sforzi di taglio e di sforzi normali, compresa la pressione. Poi, dopo ricavata l'equazione, correleremo questi sforzi alle componenti della velocità e otterremo la forma finale dell'equazione della quantità di moto.

Consideriamo il cubetto fluido di fig. 3-9; gli sforzi vengono indicati con il simbolo σ_{ij}: il primo indice indica la faccia su cui agisce lo sforzo, il secondo la direzione di quest'ultimo. La faccia è contenuta nel piano perpendicolare all'asse indicato dall'indice: per esempio, la 1 è perpendicolare all'asse x, o x_1. Nella figura vediamo anche per quale criterio una faccia è positiva o negativa. In un fluido gli sforzi possono variare, e presentare un gradiente; partiamo comunque dall'ipotesi che esista una disposizione ordinata di sforzi σ_{ij} (ve ne sono nove) in un punto dello spazio, e che sia una funzione di **r** e di t. Potremo allora scrivere il tensore degli sforzi

$$\sigma_{ij} \;=\; \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \qquad (3.31)$$

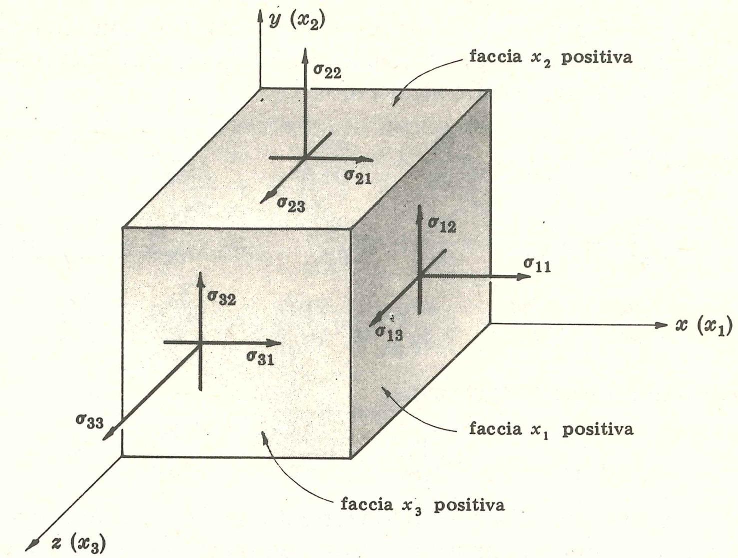


Fig. 3-9. Sforzi in un punto dello spazio. Si vedono le facce positive, le opposte sono quelle negative. Gli sforzi su queste ultime sono uguali, ma in direzione opposta a quelli agenti sulle facce positive.

Il tensore degli sforzi dev'essere simmetrico: $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. In caso contrario, se l'elementino di volume venisse ridotto a dimensioni infinitesime, esso dovrebbe ruotare con velocità angolare infinita. Per questo tensore vi sono allora sei componenti indipendenti.

Adesso possiamo applicare l'equazione integrale della quantità di moto (*3.9*) a un cubetto elementare, per il quale la forza esterna $\mathbf{F}_s$ è costituita dagli sforzi. Riferendoci alla fig. 3-10 possiamo scrivere il bilancio della quantità di moto sull'asse delle x in questa forma:

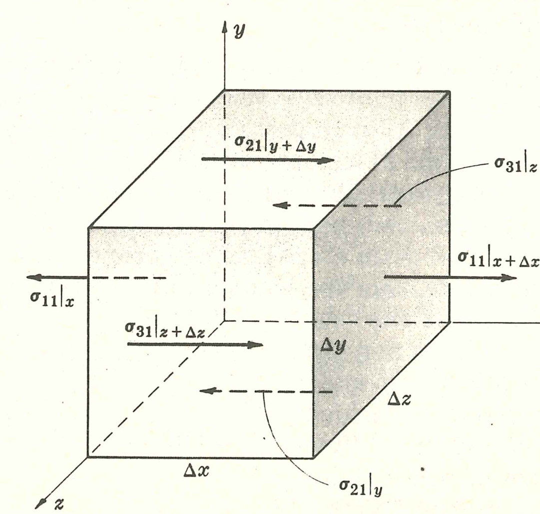


Fig. 3-10. Cubetto elementare sul quale si ricava l'equazione della quantità di moto; si vedono solo le forze agenti in direzione x.

$$(\sigma_{11}|_{x+\Delta x} - \sigma_{11}|_x)\Delta y\,\Delta z \;+\; (\sigma_{21}|_{y+\Delta y} - \sigma_{21}|_y)\Delta x\,\Delta z \;+\; (\sigma_{31}|_{z+\Delta z} - \sigma_{31}|_z)\Delta x\,\Delta y \;+\; B_x\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$$
$$= \frac{\partial}{\partial t}(u\rho)\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z \;+\; \Delta y\,\Delta z\,(\rho u^2|_{x+\Delta x} - \rho u^2|_x)$$
$$+ \;\Delta x\,\Delta z\,(\rho uv|_{y+\Delta y} - \rho uv|_y) \;+\; \Delta x\,\Delta y\,(\rho uw|_{z+\Delta z} - \rho uw|_z)$$

Dividendo per $\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$ e portando al limite, al tendere a zero dei medesimi incrementi, possiamo combinare la precedente con l'equazione (*3.28*) e semplificare nel modo che segue. (Le componenti y e z si ottengono allo stesso modo.)

$$\begin{aligned}
\rho\frac{Du}{Dt} &= \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial z} + B_x \\
\rho\frac{Dv}{Dt} &= \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = \frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{23}}{\partial z} + B_y \qquad (3.32)\\
\rho\frac{Dw}{Dt} &= \rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = \frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{32}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{33}}{\partial z} + B_z
\end{aligned}$$

ovvero, nella notazione tensoriale cartesiana,

$$\rho\frac{Du_i}{Dt} = \rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j} + B_i \qquad (3.33)$$

I termini a sinistra costituiscono l'accelerazione; quello in $\partial/\partial t$ è non permanente, e indica una certa variazione nel tempo in corrispondenza a un punto fisso nello spazio. I termini sprovvisti di $\partial/\partial t$ costituiscono quella che viene chiamata accelerazione convettiva, dovuta al fatto che lavoriamo in coordinate euleriane.

L'operatore D/Dt è la derivata sostanziale; si tratta in genere di un operatore vettoriale, quindi le sue componenti che agiscono su di un vettore *non* sono uguali a quelle che agiscono sulle componenti scalari dello stesso vettore: questo succede solo nel caso delle coordinate cartesiane. Le (*3.32*) possono essere generalizzate in forma vettoriale, valida per qualsiasi sistema di riferimento. L'accelerazione è allora $\rho\,D\mathbf{V}/Dt$ e

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V} = \frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t} + \nabla(V^2/2) - \mathbf{V}\times\nabla\times\mathbf{V}$$

Nel riferimento 5 di pag. 47 troviamo un elenco di espressioni dell'operatore vettoriale $D\mathbf{V}/Dt$ nei diversi sistemi di riferimento.

Per capire il significato fisico dell'accelerazione convettiva, pensiamo a un fluido che scorre nel canale convergente di fig. 3.11. Nel punto B la velocità è maggiore che in A, perché in B la sezione attraversata è più piccola. Allora una particella che passa da A a B risente di un'accelerazione, dovuta alla variazione di sezione: si tratta dell'accelerazione convettiva. Se inoltre imponiamo un gradiente alla portata in massa (sia per esempio la portata in massa di 6 kg/s in un istante, e di 8 kg/s 5 secondi più tardi) ogni punto della corrente risentirà di un aumento locale della velocità, cioè di un'accelerazione. Avremo così un'accelerazione locale perché il moto non è permanente, e un'accelerazione convettiva perché c'è una variazione di sezione. E' importante notare che l'accelerazione è un vettore, e il suo valore non cambia, sia che lo mettiamo in coordinate lagrangiane che euleriane. In altri termini, se identifichiamo a un certo istante un punto nello spazio, il fluido avrà lì una velocità e accelerazione ben definite in grandezza e direzione. Si ha dunque $D\mathbf{V}/Dt = \ddot{\mathbf{r}}$, in cui $\mathbf{r}$ è la coordinata lagrangiana mentre D/Dt è espressa in funzione delle coordinate euleriane.

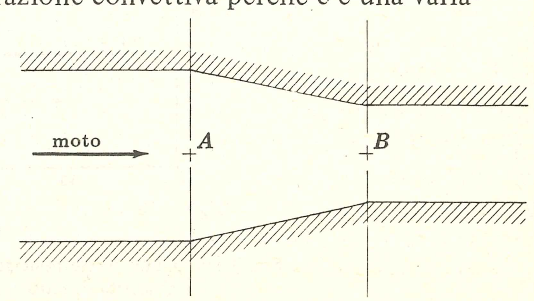


Fig. 3-11. Condotto convergente.

Nella maggior parte dei casi considereremo dei moti permanenti: l'accelerazione locale sarà per lo più zero, e quella delle particelle sarà dovuta ai soli effetti convettivi.

(*c*) **L'equazione della quantità di moto per le correnti senza attrito.** In questo caso non vi sono sforzi di taglio, e quelli normali si riducono alla pressione, che è isotropa. Avendo noi già definito gli sforzi normali come positivi se si tratta di trazioni (σ_{11}, σ_{22}, σ_{33}) possiamo adesso scrivere

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -p$$

così che le equazioni del moto diventano, in forma cartesiana,

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + B_i \qquad (3.34)$$

ovvero, evidenziando le componenti,

$$\begin{aligned}
\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + B_x \\
\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + B_y \qquad (3.35)\\
\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + B_z
\end{aligned}$$

Queste sono le equazioni di Eulero per il moto senza attrito. Se si tratta di un moto incompressibile la densità è costante, e le tre equazioni di Eulero vengono a costituire, assieme alla equazione di continuità, un sistema di quattro equazioni nelle quattro incognite u, v, w, p. La soluzione però si presenta spesso difficile per colpa dell'accelerazione convettiva, che fa perdere a dette equazioni il carattere di linearità.

Nella forma vettoriale generalizzata le equazioni di Eulero diventano:

$$\rho\left[\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{V^2}{2}\right) - \mathbf{V}\times\nabla\times\mathbf{V}\right] = -\nabla p + \mathbf{B} \qquad (3.36)$$

Se integriamo la (*3.36*) tra due punti su una linea di corrente otteniamo un importante integrale generale dell'equazione del moto. Su detta linea di corrente prendiamo un elementino lungo $d\mathbf{s}$:

$$\rho\left[\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}\cdot d\mathbf{s} + \nabla\left(\frac{V^2}{2}\right)\cdot d\mathbf{s} - \mathbf{V}\times\nabla\times\mathbf{V}\cdot d\mathbf{s}\right] = -(\nabla p + \rho\nabla\psi)\cdot d\mathbf{s} \qquad (3.37)$$

Essendo $\mathbf{V}$ parallela a $d\mathbf{s}$, il termine $(\mathbf{V}\times\nabla\times\mathbf{V})$ è perpendicolare allo stesso $d\mathbf{s}$, e

$$(\mathbf{V}\times\nabla\times\mathbf{V})\cdot d\mathbf{s} = 0$$

E abbiamo allora, per una corrente senza attrito,

$$\int_1^2 \frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}\cdot d\mathbf{s} + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + \int_1^2 \frac{dp}{\rho} + \psi_2 - \psi_1 = 0 \qquad (3.38)$$

Di solito questa equazione viene scritta per un moto permanente, e il potenziale ψ è quello gravitazionale gz (in cui z è l'altezza rispetto ad un riferimento arbitrario), così che la forza di gravità vale $-\rho g\hat{\mathbf{z}}$. $\hat{\mathbf{z}}$ è un vettore unitario, diretto verticalmente. La (*3.38*) diventa allora

$$\frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + \int_1^2 \frac{dp}{\rho} + g(z_2 - z_1) = 0 \qquad (3.39)$$

equazione di Eulero, o anche equazione generalizzata di Bernoulli. Nel moto incompressibile,

$$\frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + \frac{p_2 - p_1}{\rho} + g(z_2 - z_1) = 0 \qquad (3.40)$$

e questa è l'equazione di Bernoulli, forma integrale importantissima dell'equazione del moto. Si ricordi che essa è basata sulle ipotesi di moto permanente, senza attrito, incompressibile, e unica forza di massa è la gravità. Essa vale lungo una linea di corrente.

Se vogliamo integrare la (*3.37*) tra due punti qualsiasi, su linee di corrente differenti, del campo di corrente, se $\nabla \times \mathbf{V} = 0$ potremo avere solo l'equazione di Eulero, o Bernoulli. Il termine ora visto si dice rotazione del fluido; quando è $\nabla \times \mathbf{V} = 0$ il moto è irrotazionale; discuteremo più tardi, nel capitolo 6, il criterio che discrimina l'irrotazionalità.

E' interessante notare come la (*3.40*) sia identica alla (*3.22c*), ricavata quest'ultima con considerazioni energetiche. Confrontando la prima con la (*3.22b*) e la (*3.22c*) vediamo che $(u_2 - u_1 - q)$ è una perdita di carico, e infatti le suddette due equazioni si possono ricavare dall'equazione della quantità di moto. Se integriamo la forma generale della (*3.36*) e teniamo conto dei termini viscosi, che danno luogo a H_L, e assumiamo che $\mathbf{B}$ abbia un comportamento non conservativo – il che dà luogo a w_S – possiamo ricavare la (*3.22b*), compreso il termine w_S. Troveremo nell'equazione (*3.48*) del paragrafo (*e*), nel quale discuteremo le equazioni di Navier-Stokes, questa forma generalizzata dell'equazione della quantità di moto. Non abbiamo bisogno qui di completare l'integrazione, dato che con il criterio dell'integrazione si ottiene la (*3.22b*), cosa che abbiamo già fatto.

Prima di occuparci del moto con attrito, diciamo una parola su sforzi e deformazioni nei fluidi.

(*d*) **Relazioni tra sforzi e deformazioni nei fluidi.** Per estendere il nostro studio ai fluidi viscosi, dobbiamo prima approfondire il concetto di sforzo e deformazione.

Per un fluido, il tensore velocità di deformazione si scrive $\partial u_i/\partial x_j$; la parte simmetrica di questo è il tensore velocità di deformazione, quella asimmetrica è il tensore rotazione, correlato a $\nabla \times \mathbf{V}$. Il primo viene indicato con e_{ij}, il secondo con ω_{ij}. Il tensore velocità di deformazione si può scrivere allora

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = e_{ij} + \omega_{ij} \qquad (3.41)$$

Mostreremo nel capitolo 6 come gli elementi del tensore rotazione siano collegati alla velocità angolare Ω_i di una particella fluida infinitesimale dalla

$$\Omega_1 = \omega_{32} = -\omega_{23}, \quad \Omega_2 = \omega_{13} = -\omega_{31}, \quad \Omega_3 = \omega_{21} = -\omega_{12} \qquad (3.42)$$

Possiamo dunque porre in forma vettoriale la seguente importante relazione:

$$\mathbf{\Omega} = \tfrac{1}{2}\nabla \times \mathbf{V} \qquad (3.43)$$

La velocità angolare fisica del fluido è pari alla metà dell'operatore nabla (rotore) del vettore velocità.

Le componenti diagonali (normali) del tensore velocità di deformazione si possono direttamente identificare con la velocità vera di deformazione normale. Comunque i termini fuori diagonale (componenti della velocità di taglio) e_{ij}, $i \neq j$, sono uguali a metà delle componenti della velocità vera di taglio, indicate con γ_{ij}. Il coefficiente 1/2 è necessario affinché e_{ij} sia un tensore vero. Possiamo scrivere $e_{ii} = \gamma_{ii}$ e $e_{ij} = \frac{1}{2}\gamma_{ij}$ $(i \neq j)$. Elenchiamo qui sotto le componenti cartesiane dei tensori deformazione e rotazione; un elenco più completo si può trovare nel rif. 5 di pag. 47.

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}; & e_{xy} &= e_{yx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ e_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y}; & e_{yz} &= e_{zy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ e_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z}; & e_{xz} &= e_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \end{aligned} \qquad (3.44)$$

$$\begin{aligned} \Omega_x &= \omega_{zy} = -\omega_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ \Omega_y &= \omega_{xz} = -\omega_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \Omega_z &= \omega_{yx} = -\omega_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \end{aligned}$$

Ora per un fluido newtoniano vale l'ipotesi che tra tensore degli sforzi e tensore delle deformazioni esista una relazione lineare; si può dimostrare che la relazione più generale, nella notazione tensoriale cartesiana, ha la seguente forma:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma'_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} + \delta_{ij}\lambda\phi \qquad (3.45)$$

in cui ϕ è la dilatazione del fluido, $\nabla \cdot \mathbf{V}$, pari a zero per un fluido incompressibile. δ_{ij} è il delta di Kronecker, λ un secondo coefficiente di viscosità, come $\zeta = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ il quale per un gas monoatomico risulta uguale a zero. L'equazione (*3.45*) si può riscrivere nella forma

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right) + \zeta\delta_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \qquad (3.46)$$

Una completa derivazione di questa espressione si può trovare tra i riferimenti di pag. 47.

Ora questa espressione di σ_{ij} si può sostituire nell'equazione della quantità di moto, per ricavare l'equazione completa del moto di un fluido viscoso: siamo così giunti alle equazioni di Navier-Stokes.

(*e*) **Le equazioni di Navier-Stokes.** Esse sono le equazioni complete del moto per un fluido newtoniano viscoso. Se usiamo la (*3.46*), la (*3.33*) diventa

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + B_i + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\zeta\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right) \qquad (3.47)$$

ovvero, in forma generica vettoriale,

$$\begin{aligned} \rho\frac{D\mathbf{V}}{Dt} &= \rho\left[\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{V^2}{2}\right) - \mathbf{V}\times\nabla\times\mathbf{V}\right] \\ &= -\nabla p + \mathbf{B} + \nabla\times[\mu(\nabla\times\mathbf{V})] + \nabla[(\zeta + \tfrac{4}{3}\mu)\nabla\cdot\mathbf{V}] \end{aligned} \qquad (3.48)$$

La viscosità si può togliere dalle derivate con errore trascurabile. Per un fluido incompressibile $(\nabla \cdot \mathbf{V} = 0)$ dette equazioni si riducono a

$$\rho\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p + \mathbf{B} + \mu\nabla^2\mathbf{V} \qquad (3.49)$$

equazione molto importante, che diventa familiare allo studioso di fluidodinamica. E' della *massima importanza* ricordare che D/Dt e ∇^2 sono degli operatori vettoriali, e *non* si possono applicare alle componenti della velocità se non in coordinate cartesiane. E' meglio effettuare prima le operazioni, poi prendere le componenti; per questa equazione, queste ultime si possono trovare in appendice e nel rif. 5 di pag. 47.

Confrontiamo ora le equazioni complete di Navier-Stokes con le equazioni di Eulero per il moto senza attrito: le differenze consistono nei termini addizionali, dovuti alla viscosità; se il fluido è incompressibile questi sono tutti della forma $\partial u_i/\partial x_j$ $(i \neq j)$. Allora in questo ultimo caso, anche se μ è diversa da zero, i termini viscosi sono trascurabili se le derivate del tipo $\partial u_i/\partial x_j$ sono piccole: in questo caso le equazioni diventano equazioni di Eulero.

Dunque le equazioni di Navier-Stokes si riducono a quelle di Eulero se la viscosità è piccola, o se le derivate delle velocità, prese rispetto a direzioni diverse da quella della velocità stessa, sono piccole. Quest'ultima approssimazione è molto importante nella meccanica dei fluidi: si assume che per molte correnti si dà luogo a due regioni: una vicina a una superficie solida, e lì i termini relativi alla viscosità hanno importanza e bisogna usare le equazioni di Navier-Stokes; una lontana dalla superficie suddetta, nella quale per una buona approssimazione sono sufficienti le equazioni di Eulero. Queste due regioni verranno studiate in altri capitoli: il quinto, con il "Moto nello strato limite", e il sesto, con il "Moto potenziale". A causa della diversa forma delle equazioni, questi due argomenti vengono trattati in modo del tutto diverso.

(*f*) **L'equazione dell'energia.** Si ricava facendo il bilancio per un volume di controllo, e passando ad una forma differenziale in modo puramente matematico. Cominciamo nello stesso modo usato per le forme integrali all'inizio del capitolo: adesso però consideriamo subito un volume di controllo, senza pensare al sistema in moto; vedi fig. 3-12.

Assumiamo un vettore velocità $\mathbf{V}$ e un vettore flusso di calore $\mathbf{q}$, agenti su un punto della superficie considerata; $\mathbf{q}$ rappresenta la portata in calore che esce per conduzione e irraggiamento: il suo valore complessivo dQ/dt, entrante nel volume di controllo, risulta

$$-\int_{C.S.} \mathbf{q}\cdot d\mathbf{A} = -\int_{C.S.} q_i\, dA_i .$$

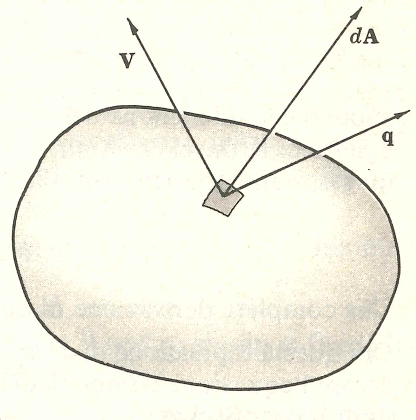


Fig. 3-12. Volume di controllo per il bilancio dell'energia

Il lavoro che il fluido compie nel volume può ancora venir diviso in due parti: lavoro reversibile compiuto dalla pressione sulla superficie di controllo, lavoro irreversibile compiuto sulla stessa superficie dagli sforzi di taglio. La variazione del lavoro totale compiuto dal fluido (potenza) nel volume di controllo risulta allora, in funzione del tensore (in forma cartesiana) degli sforzi,

$$\frac{dW}{dt} = -\int_{C.S.} u_i\sigma_{ji}\, dA_j$$

Ora possiamo dire che l'aumento netto di energia totale (cinetica, interna e potenziale) nel volume di controllo dipende dalla velocità con cui il calore entra nel volume stesso, più la velocità con cui si genera calore in quest'ultimo, meno la velocità con cui il fluido compie lavoro sul proprio intorno. Abbiamo allora

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{C.V.} \rho e\, d\mathcal{V} + \int_{C.S.} \rho e u_i\, dA_i = -\int_{C.S.} q_i\, dA_i + \int_{C.S.} u_i\sigma_{ji}\, dA_j + \int_{C.V.} q'''\, d\mathcal{V}$$

Ricordiamo che e, energia totale per unità di massa, è data dalla $e = V^2/2 + u + \psi$, in cui ψ è il potenziale gravitazionale rappresentato da gz, come si è già visto nel precedente sviluppo integrale. q''' è la velocità con cui si genera calore interno, per unità di volume. Il tensore degli sforzi può essere diviso in una parte pressione e una parte taglio: $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma'_{ij}$. Applicando il teorema di Gauss l'equazione dell'energia diventa

$$\int_{C.V.}\left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho e u_i) + \frac{\partial}{\partial x_i}q_i + q''' + \frac{\partial}{\partial x_i}(p u_i) - \frac{\partial}{\partial x_i}(u_j\sigma'_{ij})\right] d\mathcal{V} = 0$$

Essendo arbitrario il volume, la funzione arbitraria dev'essere zero. Sviluppando e applicando l'equazione di continuità,

$$\rho\frac{De}{Dt} = -\frac{\partial}{\partial x_i}q_i - p\frac{\partial u_i}{\partial x_i} - u_i\frac{\partial p}{\partial x_i} + u_i\frac{\partial \sigma'_{ji}}{\partial x_j} + \Phi + q''' \qquad (3.50)$$

in cui $\Phi = \sigma'_{ij}\,\partial u_j/\partial x_i$ è la funzione dissipazione[3] ed è la velocità con cui gli sforzi di taglio compiono lavoro irreversibile sul fluido. La troviamo in appendice, espressa in funzione di u_i. Qui la derivata sostanziale opera su uno scalare e non dobbiamo preoccuparci delle sue proprietà vettoriali, come succedeva per l'equazione del moto. Si possono trovare in appendice le forme che la D/Dt assume nei diversi sistemi di coordinate. Fisicamente, la derivata è la velocità di variazione di una proprietà o di un parametro, quale si può constatarla viaggiando insieme al fluido. Se invece di un volume di controllo considerassimo una particella fissa del fluido, useremmo la $\partial/\partial t$. La forma della D/Dt rappresenta un bilancio istantaneo in coordinate euleriane, fatto sul sistema fluido del volume di controllo.
Si tratta di un'equazione utile, che però porta in sé l'equazione della quantità di moto: sottraendo quest'ultima otterremo una semplificazione. A sinistra notiamo le velocità di accrescimento dell'energia potenziale e cinetica; il terzo e quarto termine a destra rappresentano la velocità cui lavorano gli sforzi, compresa la pressione. Prendendo il prodotto scalare di $\mathbf{V}$ con l'equazione del moto (*3.33*) e assumendo che la forza di massa B_i sia dovuta al campo conservativo gravitazionale $-\rho\,\partial\psi/\partial x_i$, otteniamo

$$\rho u_i\frac{Du_i}{Dt} = \rho\frac{D}{Dt}\left(\frac{V^2}{2}\right) = -u_i\frac{\partial p}{\partial x_i} + u_i\frac{\partial\sigma'_{ij}}{\partial x_j} - \rho u_i\frac{\partial\psi}{\partial x_i} \qquad (3.51)$$

equazione meccanica dell'energia. Essendo ψ costante nel tempo, possiamo aggiungere $\rho\,\partial\psi/\partial t$ a sinistra (tanto è zero), e otteniamo

$$\rho\frac{D}{Dt}(V^2/2 + \psi) = -u_i\frac{\partial p}{\partial x_i} + u_i\frac{\partial\sigma'_{ij}}{\partial x_j}$$

che si può sottrarre all'equazione dell'energia (*3.50*):

$$\rho\frac{Du}{Dt} = -p\frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \Phi + q''' \qquad (3.52)$$

forma finale della stessa equazione dell'energia. Qui u è l'energia interna per unità di massa.

Si possono fare molte semplificazioni della (*3.52*). Introduciamo la legge di Fourier di trasmissione del calore, $\mathbf{q} = -\kappa\nabla T$, assumendo conducibilità termica costante e un gas perfetto $(du = c_v\, dT)$. E' inoltre $\partial u_i/\partial x_i = \nabla\cdot\mathbf{V}$, e $\nabla\cdot\nabla T = \nabla^2 T$, così finalmente possiamo scrivere

$$\rho c_v\frac{DT}{Dt} = -p\,\nabla\cdot\mathbf{V} + \kappa\nabla^2 T - \nabla\cdot\mathbf{q}_r + q''' + \Phi \qquad (3.53)$$

con $\mathbf{q}_r$ vettore flusso di calore per irraggiamento. Notiamo che se anche c_v risulta essere funzione della temperatura essa si trova fuori, e *non dentro* la derivata.

La (*3.53*) si può mettere in forme diverse; introducendo l'entalpia $h = u + p/\rho$, potremo scrivere

$$\rho\frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \kappa\nabla^2 T - \nabla\cdot\mathbf{q}_r + q''' + \Phi \qquad (3.54)$$

che per un gas perfetto diventa

$$\rho c_p\frac{DT}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \kappa\nabla^2 T - \nabla\cdot\mathbf{q}_r + q''' + \Phi \qquad (3.55)$$

Ricordiamo ora che un fluido incompressibile non è un gas perfetto: h dipende da T e da p. E' meglio allora partire con la (*3.52*) e porre $\nabla\cdot\mathbf{V} = 0$. Possiamo scrivere $du = c_v\, dT$, ottenendo

$$\rho c_v\frac{DT}{Dt} = \kappa\nabla^2 T - \nabla\cdot\mathbf{q}_r + q''' + \Phi \qquad (3.56)$$

[3] Talvolta il termine dissipazione è scritto come $\mu\Phi$, e Φ differisce allora dalla nostra per un fattore μ.

E' utile talvolta servirsi dell'equazione completa (*3.50*), specie per i fluidi senza attrito. Se poniamo $\psi = gz$, usiamo la legge di Fourier e introduciamo l'entalpia, la (*3.50*) diventa

$$\rho\frac{D}{Dt}(V^2/2 + gz + h) \;=\; \frac{\partial p}{\partial t} + \kappa\nabla^2 T - \nabla\cdot\mathbf{q}_r + q'''$$

$$\rho\frac{D}{Dt}(V^2/2 + gz + u) \;=\; -p\nabla\cdot\mathbf{V} - \mathbf{V}\cdot\nabla p + \kappa\nabla^2 T - \nabla\cdot\mathbf{q}_r + q''' \qquad (3.57)$$

La $\mathbf{q}_r$ è di solito trascurabile e q''' è zero, a parte certi casi che comprendono riscaldamenti da resistenze. E' raro che in fluidodinamica si tenga conto di $\mathbf{q}_r$ e di q''': qui ne abbiamo tenuto conto solo per completezza.

Adesso è interessante confrontare di nuovo le equazioni (*3.22b*), (*3.22c*) e (*3.40*). La (*3.22b*) è un'equazione dell'energia, ma adesso sappiamo che poiché l' equazione dell'energia totale (*3.50*), o (*3.57*), racchiude la quantità di moto, la (*3.22c*) è in effetti l'equazione della quantità di moto e ha lo stesso significato della (*3.40*), equazione di Bernoulli.

(*g*) **Il secondo principio della termodinamica. Produzione di entropia.** Possiamo far diventare l'equazione (*3.23*) un'identità, introducendo il concetto di velocità θ di produzione dell'entropia per unità di volume. Troviamo, usando il vettore flusso di calore $\mathbf{q}$,

$$\int_{\text{c.v.}} \theta\, d\mathcal{V} - \int_{\text{c.s.}} \frac{\mathbf{q}}{T}\cdot d\mathbf{A} \;=\; \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{c.v.}} \rho s\, d\mathcal{V} + \int_{\text{c.s.}} \rho s \mathbf{V}\cdot d\mathbf{A} \qquad (3.58)$$

Applicando la legge di Gauss e l'equazione di continuità,

$$\theta - \nabla\cdot(\mathbf{q}/T) \;=\; \rho\frac{Ds}{Dt} \qquad (3.59)$$

Con l'equazione dell'energia e la relazione termodinamica fondamentale,

$$\rho\frac{Du}{Dt} \;=\; \rho T\frac{Ds}{Dt} - p\nabla\cdot\mathbf{V} \qquad (3.60)$$

che è l'espressione euleriana della

$$du \;=\; T\,ds - p\,d(1/\rho)$$

Se vale la legge di Fourier, e trascurando l'irraggiamento, la (*3.59*) si può mettere nella forma

$$\theta \;=\; \frac{\Phi}{T} + \frac{\mathbf{q}\cdot\mathbf{q}}{\kappa T^2} \;=\; \frac{\Phi}{T} + \kappa\frac{(\nabla T)^2}{T^2} \qquad (3.61)$$

che ci dà la velocità di produzione di entropia in funzione delle irreversibilità concorrenti di portate di calore e dissipazione viscosa.

3.4 SOMMARIO, APPLICAZIONI E PROBLEMI

Ricavare le equazioni è stata in questo capitolo una faccenda lunga e tediosa. Si tratta di equazioni che non si possono usare come i "conti fatti"; ficcar dei numeri in una serie di equazioni, sperando che una dia i risultati voluti, può essere, e molto probabilmente sarà, un metodo disastroso. E' della massima importanza capire il significato delle equazioni viste, comprese limitazioni e restrizioni collegate a certe forme particolari.

Abbiamo cominciato con le leggi fondamentali, scritto le corrispondenti equazioni per i sistemi, ricavate le equazioni integrali per i volumi di controllo, le equazioni differenziali, e presentate alcune forme semplificate, o funzionanti, delle stesse equazioni. Tutto ciò si può riassumere così:

Leggi fondamentali →	Equazioni del sistema →	Equazioni integrali (volume di controllo) ovvero	Equazioni differenziali
1. Continuità	1. $\frac{d}{dt}(m) = 0$	1. Eq. (*3.1*)	1. Eq. (*3.25*)
2. Quantità di moto (lineare)	2. $\frac{d}{dt}(m\mathbf{V}) = \mathbf{F}$	2. Eq. (*3.9*)	2. Eq. (*3.32*), (*3.34*), (*3.48*)
3. Momento della quantità di moto	3. $\frac{d}{dt}(m\mathbf{r}\times\mathbf{V}) = \mathbf{r}\times\mathbf{F}$	3. Eq. (*3.11*)	3. —
4. Energia	4. $\frac{d}{dt}(E) = \frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt}$	4. Eq. (*3.20*)	4. Eq. (*3.53*), (*3.54*)
5. Secondo principio della termodinamica	5. $dS - \frac{dQ}{T} \geqq 0$	5. Eq. (*3.23*)	5. Eq. (*3.58*), (*3.61*)

(*a*) **Equazioni integrali.** Tutte e quattro le equazioni integrali per il volume di controllo hanno la forma

$$\text{Forze esterne} \;=\; \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{c.v.}} \xi\rho\, d\mathcal{V} + \int_{\text{c.s.}} \xi\rho\mathbf{V}\cdot d\mathbf{A} \qquad (3.62)$$

in cui

Legge fondamentale	Forze esterne	ξ
Continuità	0	1
Quantità di moto lineare	$\mathbf{F}_S + \int_{\text{c.v.}} \mathbf{B}\, d\mathcal{V}$	$\mathbf{V}$
Momento della quantità di moto	$\int_{\text{c.s.}} \mathbf{r}\times d\mathbf{F}_S + \int_{\text{c.v.}} \mathbf{r}\times\mathbf{B}\, d\mathcal{V}$	$\mathbf{r}\times\mathbf{V}$
Energia	$\frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt}$	e

Raccogliendole in questo modo, possiamo vedere subito le similitudini tra queste equazioni. Guardando indietro possiamo poi notare che tutte le equazioni per il volume di controllo sono state ricavate con metodi simili.

(*b*) **Forme speciali di equazioni integrali**

1. Continuità – moto permanente unidimensionale:

$$\rho_1 A_1 V_1 \;=\; \rho_2 A_2 V_2 \qquad (3.4)$$

2. Quantità di moto – moto permanente unidimensionale a densità e velocità uniformi nelle sezioni di entrata e di uscita:

$$F_x \;=\; \dot m(V_{2x} - V_{1x}), \qquad F_y \;=\; \dot m(V_{2y} - V_{1y}), \qquad F_z \;=\; \dot m(V_{2z} - V_{1z})$$

3. Momento della quantità di moto – velocità uniforme su A_1 e A_2, moto uniforme attraverso un rotore:

$$T_z \;=\; \rho_1 Q_1 (r_2 V_{t2} - \dot r_1 V_{t1}) \qquad (3.14)$$

4. Energia – moto permanente unidimensionale:

$$q - w_S \;=\; (p_2/\rho_2 - p_1/\rho_1) + (u_2 - u_1) + (V_2^2 - V_1^2)/2 + g(z_2 - z_1) \qquad (3.22a)$$

(*c*) **Equazioni differenziali**

1. Continuità:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \tag{3.25}$$

che per una corrente incompressibile diventa

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \tag{3.27}$$

2. Quantità di moto:

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p + \mathbf{B} - \nabla \times [\mu(\nabla \times \mathbf{V})] + \nabla[(\zeta + \tfrac{4}{3}\mu)\nabla \cdot \mathbf{V}] \tag{3.48}$$

Per densità e viscosità costanti l'equazione della quantità di moto diventa

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p + \mathbf{B} + \mu \nabla^2 \mathbf{V} \tag{3.49}$$

3. Equazione dell'energia:

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} = -p\nabla \cdot \mathbf{V} + \kappa \nabla^2 T - \nabla \cdot \mathbf{q}_r + \Phi + q''' \tag{3.53}$$

Equazioni espresse in altri sistemi di coordinate si possono trovare nell'appendice, e nel rif. 5 di pag. 47.

(*d*) **Soluzione di problemi.** Abbiamo ormai a disposizione alcune tra le più generali e importanti equazioni della fluidodinamica. Raggiunta una certa comprensione di esse, bisogna esser capaci di applicarle per risolvere dei problemi pratici. Anche se nulla può sostituire l'esperienza per lavorare attorno a dei problemi, possiamo tracciare a questo punto delle regole generali.

Tre approcci sono in genere possibili quando abbiamo a che fare con un problema reale:

1. Equazioni integrali: valutazioni approssimative
2. Equazioni differenziali: distribuzioni
3. Partire dalle leggi fondamentali, sviluppando delle equazioni adatte al caso particolare.

Le equazioni integrali van bene di solito quando si desidera approssimare gli effetti nella loro totalità, per esempio la forza complessiva esercitata da un fluido in moto sulla parete di una tubazione o la paletta di un rotore. Le equazioni differenziali sono adatte quando si vogliono avere le condizioni della distribuzione, per esempio la distribuzione di velocità e pressione (campo) attorno a un profilo aerodinamico. In qualsiasi problema non bisogna mai precludersi la possibilità di sviluppare delle equazioni dalle leggi fondamentali (con le opportune ipotesi di lavoro, si possono sempre ricavare dalle equazioni fondamentali, integrali o differenziali). Vedremo che questo metodo è particolarmente consigliabile per sviluppare le equazioni dello strato limite.

Le formule che abbiamo trovato sono gli strumenti che useremo per risolvere dei problemi reali (o forse, per comprendere meglio la natura). Punto di partenza è il problema fisico; e la soluzione non è mai, o quasi mai, una descrizione esatta della reale situazione, ma una approssimazione, la cui accuratezza dipende da quella del modello matematico. Il procedimento di soluzione si può tratteggiare nel modo che segue:

(1) Problema fisico specifico.

(2) Modello fisico – rappresentiamo il problema reale con uno nuovo, semplificato. Possiamo per esempio accettare l'ipotesi di moto unidimensionale, di moto permanente, di fluido che segue le equazioni di stato del gas ideale, ecc. In tal modo le ipotesi mettono assieme il modello.

(*3*) Modello matematico – tracciamo le equazioni che descrivono il modello fisico.

(*4*) Soluzione – si risolvono le equazioni rispetto alle grandezze cercate.

(*5*) Prova – il passo finale è di verificare la correttezza del modello tramite delle prove: è un passo molto importante in fluidodinamica. L'esperimento conduce al miglioramento del modello.

BIBLIOGRAFIA

1. Bird R. B., Stewart W. E., Lightfoot E.N., *Transport Phenomena,* John Wiley, 1960.
2. Brenkert K. Jr., *Elementary Theoretical Fluid Mechanics*, John Wiley, 1960.
3. Chapman S., Cowling T. G., *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases,*Cambridge University Press, 1961.
4. Curtiss C. F., Bird R. B., *Molecular Theory of Gases and Liquids*, John Wiley, 1954.
5. Hughes W. F., Gaylord E. W., *Basic Equations of Engineering Science*, Schaum Publishing Co., 1964 (trad. it. *Equazioni per l'ingegneria,* Etas Libri, Milano 1975).
6. Jones J. B., Hawkins G. A., *Engineering Thermodynamics*, John Wiley, 1960.
7. Keenan J. H., *Thermodynamics*, John Wiley, 1941.
8. Landau L. D., Lifshitz E. M., *Fluid Mechanics*, Addison-Wesley, 1959.
9. Pai S. L., *Viscous Flow Theory*, voll. I e II, Van Nostrand, 1956.
10. Reynolds W.C., *Thermodynamics*, McGraw-Hill, 1965.
11. Sabersky R.H., Acosta A. J., *Fluid Flow*, Macmillan Co., 1964.
12. Schlichting H., *Boundary Layer Theory*, McGraw-Hill, 1955.
13. Shames I.H., *Mechanics of Fluids*, McGraw-Hill, 1962.
14. Sommerfeld A., *Dynamics of Deformable Media*, Academic Press, 1950.
15. Castagna A., *Lezioni di meccanica delle macchine*, Ed. Ateneo, Roma, 1963.
16. Giles R.V., *Meccanica dei fluidi e idraulica*, Etas Libri, Milano, 1975.
17. Eula A., *Lezioni di Aerodinamica*, Università di Roma, 1968.
18. Bordoni U., *Fondamenti di Fisica Tecnica*, Zanichelli, Bologna, 1960.

PROBLEMI RISOLTI

3.1. Consideriamo il moto permanente di un fluido compressibile attraverso il gomito di fig. 3-13. Trovare la forza che il fluido esercita sul tubo tra le sezioni 1 e 2.

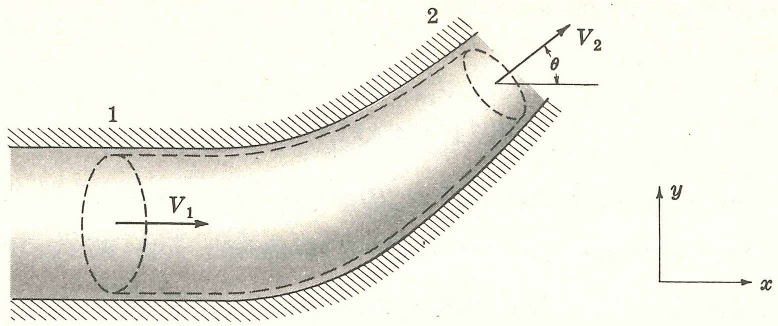


Fig. 3-13

Scegliamo per il fluido un volume di controllo: quello indicato dalla linea tratteggiata. La (*3.9*) diventa per il moto permanente

$$\mathbf{F}_s + \int_{\text{C.V.}} \mathbf{B}\, d\mathcal{V} \;=\; \int_{\text{C.S.}} \mathbf{V}\rho\mathbf{V}\cdot d\mathbf{A}$$

Assumeremo che pressioni e velocità siano costanti sulle aree A_1 e A_2. Le forze di superficie, in direzione x ed y rispettivamente, sono

$$F_{sx} = p_1A_1 - p_2A_2\cos\theta + F_{px}$$

$$F_{sy} = -p_2A_2\sin\theta + F_{py}$$

in cui p è la pressione, F_{px} ed F_{py} le forze incognite, esercitate sul fluido dalla parete del tubo. L'unica forza di massa è dovuta alla gravità, ed è pari al peso del fluido compreso tra le sezioni 1 e 2. In diversi problemi, e specialmente per i gas, il peso è trascurabile rispetto alle altre forze in gioco: qui non ne terremo conto. I termini di portata della quantità di moto diventano

$$\int_{\text{C.S.}} V_x\rho\mathbf{V}\cdot d\mathbf{A} = \rho_2A_2V_2^2\cos\theta - \rho_1A_1V_1^2$$

$$\int_{\text{C.S.}} V_y\rho\mathbf{V}\cdot d\mathbf{A} = \rho_2A_2V_2^2\sin\theta$$

E le equazioni già viste:

$$F_{px} = p_2A_2\cos\theta - p_1A_1 + \rho_2A_2V_2^2\cos\theta - \rho_1A_1V_1^2$$

$$F_{py} = p_2A_2\sin\theta + \rho_2A_2V_2^2\sin\theta$$

Le componenti della forza esercitata dal fluido sul tubo, diciamo R_x ed R_y, risulteranno opposte ad F_{px} e F_{py}:

$$R_x = p_1A_1 - p_2A_2\cos\theta + \rho_1A_1V_1(V_1 - V_2\cos\theta)$$

$$R_y = -p_2A_2\sin\theta - \rho_2A_2V_2^2\sin\theta$$

3.2. Consideriamo il moto permanente di un getto d'acqua, che colpisce una paletta fissa come in fig. 3-14. Trovare il valore della forza necessaria a tenere la paletta al suo posto. Nell'ipotesi che il getto segua tranquillamente il profilo della paletta, e conservi la stessa forma e sezione all'uscita, l'equazione della quantità di moto si può scrivere per il volume di controllo che abbiamo tratteggiato in figura.

Il getto si trova a pressione atmosferica su tutta la superficie; si ha in più una forza addizionale, là dove il getto viene a contatto della paletta, ed è proprio la forza necessaria per deviarlo. Quanto alla pressione atmosferica, quella dal lato del getto viene annullata da quella esercitata sul lato opposto; abbiamo così

$$F_x = \rho AV^2\cos\theta - \rho AV^2, \qquad F_y = \rho AV^2\sin\theta$$

che è anche uguale alla forza necessaria a tenere a posto la paletta.

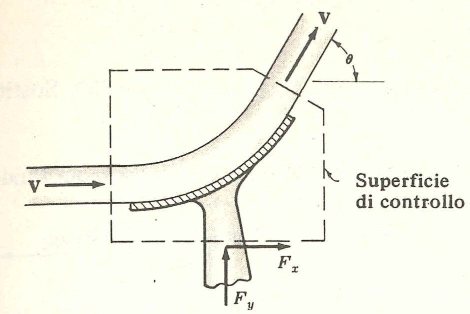


Fig. 3-14

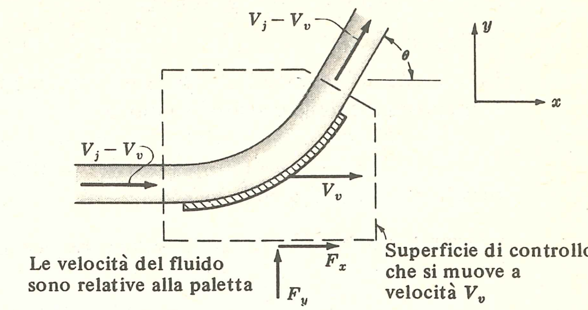


Fig. 3-15

3.3. Pensiamo ora che la paletta del problema 3.2 si muova nel senso delle x positive, a una certa velocità V_v, minore della velocità del getto V_j: vedi fig. 3.15. Trovare la forza necessaria a mantenere in moto la paletta a velocità costante, a fare in modo cioè che non acceleri.

Dobbiamo scrivere l'equazione della quantità di moto in un sistema di riferimento fisso rispetto alla paletta: tutte le velocità saranno così relative a quest'ultima. La velocità del fluido, relativa alla paletta, all'ingresso del volume di controllo, è $V_j - V_v$: se trascuriamo l'attrito, l'equazione di Bernoulli ci dice che la velocità in uscita, relativa alla paletta, è la stessa: $V_j - V_v$ ad un angolo θ. Se la velocità resta la stessa, anche la sezione trasversale del getto A deve restare la stessa; l'equazione della quantità di moto ci dà allora

$$F_x = \rho A(V_j - V_v)^2\cos\theta - \rho A(V_j - V_v)^2, \qquad F_y = \rho A(V_j - V_v)^2\sin\theta$$

forza necessaria a mantenere in moto la paletta senza accelerarla. Ora quest'ultima è in equilibrio, e dunque la forza del fluido su di essa dev'essere $-F_x$ e $-F_y$, e la sua forza di reazione sul fluido è semplicemente F_x ed F_y.

Un altro modo era di prendere la superficie di controllo proprio sul lato interno della paletta, in modo da racchiudere solo del fluido; l'analisi sarebbe allora esattamente la stessa, ma vediamo subito che la forza sul fluido (esercitata dalla paletta) è F_x, F_y.

3.4. La paletta di fig. 3.16 si muove a velocità costante $u = 9$ m/s e viene colpita da un getto d'acqua, che esce da un ugello alla velocità $V = 30$ m/s; la sezione d'uscita di quest'ultimo è di 36 cm². Trovare la forza totale che agisce sulla paletta.

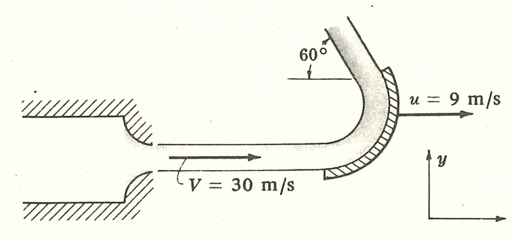


Fig. 3-16

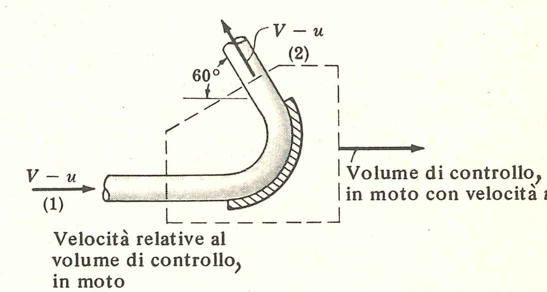


Fig. 3-17

Prendiamo il volume di controllo attorno alla paletta, come in fig. 3-17. Le velocità relative al volume di controllo sono $V - u = 30 - 9 = 21$ m/s in direzione x all'ingresso, e $V - u = 21$ m/s secondo la direzione di figura, all'uscita. La forza agente sul fluido è così data dall'equazione della quantità di moto a regime permanente: sulle x avremo

$$F_x = \dot{m}(V_{2x} - V_{1x})$$

in cui la portata in massa $\dot{m}$ relativa alla superficie di controllo è $\dot{m} = \rho A(V - u) = \rho A(30 - 9)$. Le componenti secondo le x delle velocità in entrata e uscita dal volume di controllo sono $V_{1x} = V - u$ e $V_{2x} = -(V - u)\cos 60°$. Sostituendo nell'equazione della quantità di moto,

$$F_x = \rho A(V-u)\{-(V-u)\cos 60^\circ - (V-u)\}$$
$$= -\rho A(V-u)^2\{\cos 60^\circ + 1\} = -1000/9{,}8 \times 0{,}0036\,(21)^2(\cos 60^\circ + 1) = -243 \text{ kg}_f$$ sul fluido ovvero $F_x = 243$ kg$_f$ sulla paletta.

Sulle y abbiamo $$F_y = \dot{m}(V_{2y} - V_{1y})$$

Le velocità all'ingresso e all'uscita in direzione y sono $V_{1y} = 0$ e $V_{2y} = (V-u)\sin 60^\circ$. Sostituendo nell'equazione della quantità di moto,

$$F_y = \rho A(V-u)\{(V-u)\sin 60^\circ - 0\}$$
$$= \rho A(V-u)^2 \sin 60^\circ = 1000/9{,}8 \times 0{,}0036 \times 21^2 \times \sin 60^\circ = 140 \text{ kg}_f$$ sul fluido, ovvero $F_y = 140$ kg$_f$ sulla paletta.

La grandezza della forza agente sulla paletta è allora

$$|\mathbf{F}| = \{F_x^2 + F_y^2\}^{1/2}$$
$$= [(243)^2 + (-140)^2]^{1/2} = 280 \text{ kg}_f$$

La direzione della forza è $\tan\theta = -(140/243) = -0{,}578$, ovvero $\theta = -30^\circ$. Il segno negativo vuol dire che la forza agisce verso il basso. In fig. 3-18 vediamo le forze che agiscono sulla paletta.

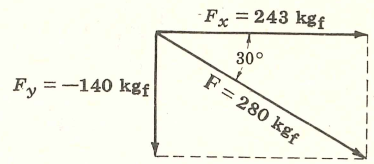


Fig. 3-18

3.5. Un getto d'acqua, in moto a 30 m/s, colpisce una paletta in moto a sua volta a 12 m/s come in fig. 3-19. Trovare (*a*) la potenza trasmessa alla paletta, (*b*) la velocità assoluta del getto al distacco dalla paletta.

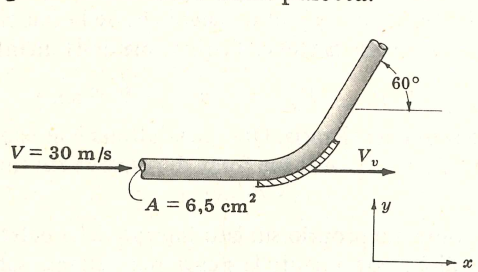


Fig. 3-19

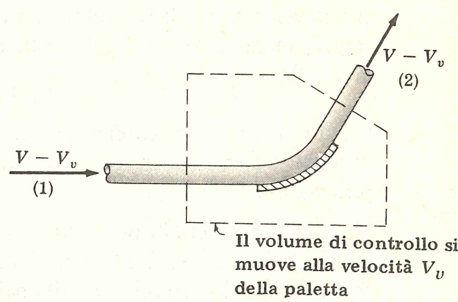


Fig. 3-20

(*a*) La potenza trasmessa è uguale al prodotto della forza, agente in direzione del moto, per la velocità della paletta; dunque

$$\text{Potenza} = F_x V_v$$

La forza che il fluido esercita sulla paletta si può trovare con l'equazione della quantità di moto, applicandola a un volume di controllo che si muove a velocità uguale a quella della paletta, come in fig. 3-20.

Per il volume di controllo, l'equazione della quantità di moto è

$$F_x = \dot{m}(V_{2x} - V_{1x}) \quad \text{sul fluido}$$

Qui F_x è anche la forza che sulla paletta viene esercitata dal supporto, come si è già detto nel problema 3.3. La portata in massa, relativa alla superficie di controllo, è $\dot{m} = \rho A(V - V_v)$. Le velocità, in direzione x, in entrata e in uscita dal volume di controllo sono $V_{1x} = V - V_v$ e $V_{2x} = (V - V_v)\cos 60^\circ$. Sostituendo,

$$F_x = \rho A(V - V_v)\{(V-V_v)\cos 60^\circ - (V - V_v)\} = \rho A(V-V_v)^2\{\cos 60^\circ - 1\}$$
$$= 1000/9{,}8 \times 0{,}00065\,(30-12)^2\,(\cos 60^\circ - 1) = -10{,}8 \text{ kg}_f$$

sul fluido, ovvero $F_x = 10{,}8$ kg$_f$ sulla paletta. La potenza è dunque $= 10{,}8 \times 12 =$ kg-m/s $= 1{,}7$ CV.

(*b*) La velocità all'uscita della paletta si può trovare aggiungendo la velocità del fluido, relativa ad essa, alla velocità della paletta stessa. Così la velocità assoluta del fluido in uscita, in direzione x, risulta

$$V_{2x} = V_{x\,\text{relativa}} + V_v = (30-12)\cos 60^\circ + 12 = 21 \text{ m/s}$$

La velocità all'uscita della paletta, in direzione y, sarà

$$V_{2y} = (30-12)\sin 60^\circ = 15{,}5 \text{ m/s}$$

E la velocità assoluta del fluido sarà

$$|\mathbf{V}_2| = (V_{2x}^2 + V_{2y}^2)^{1/2}$$
$$= [(21)^2 + (15{,}5)^2]^{1/2} = 26{,}2 \text{ m/s}$$

La direzione del fluido in uscita è data da $\tan\theta = 15{,}5/21{,}0 = 0{,}741$ ovvero $\theta = 36{,}6^\circ$. In fig. 3-21 vediamo il diagramma vettoriale delle velocità all'uscita della paletta.

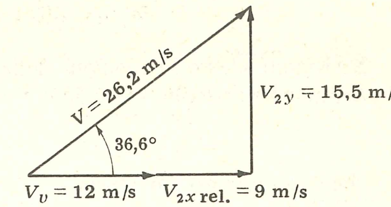


Fig. 3-21

3.6. Trovare la forza del getto d'acqua sulla lastra inclinata di fig. 3-22, in funzione dell'angolo θ.

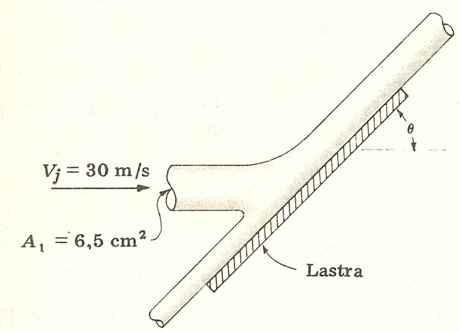


Fig. 3-22

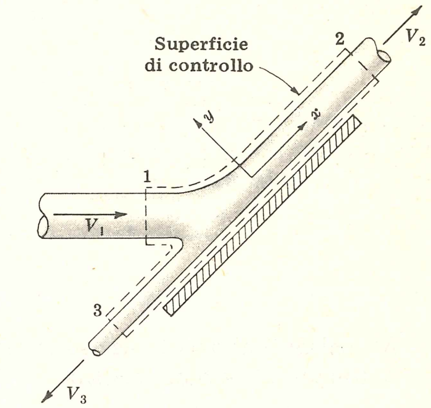


Fig. 3-23

Consideriamo il volume di controllo di fig. 3-23: il fluido entra alla sezione 1 ed esce alle sezioni 2 e 3. La portata in massa del fluido all'ingresso è uguale a quella del fluido all'uscita:

$$\rho A_1 V_j = \rho A_2 V_2 + \rho A_3 V_3 \quad \text{ovvero} \quad A_1 V_j = A_2 V_2 + A_3 V_3$$

Scriviamo adesso l'equazione di Bernoulli su una linea di corrente tra le sezioni 1 e 2 e tra le 1 e 3:

$$p_1/\rho + \tfrac{1}{2}V_j^2 = p_2/\rho + \tfrac{1}{2}V_2^2$$

e

$$p_1/\rho + \tfrac{1}{2}V_j^2 = p_3/\rho + \tfrac{1}{2}V_3^2$$

nelle quali sono state trascurate tutte le variazioni di quota. Se assumiamo che alle sezioni 1, 2, 3 vi sia pressione atmosferica, l'equazione di Bernoulli ci darà $V_j = V_2 = V_3$. Con questo risultato delle velocità uguali, otteniamo dall'equazione di continuità: $A_1 = A_2 + A_3$.

Scriviamo adesso l'equazione della quantità di moto in regime permanente sull'asse delle x parallelo alla lastra, trascurando ogni sforzo di taglio là dove il fluido entra in contatto con la suddetta. Riferendoci alla fig. 3-24 troviamo F_x, forza esercitata dalla lastra sul fluido:

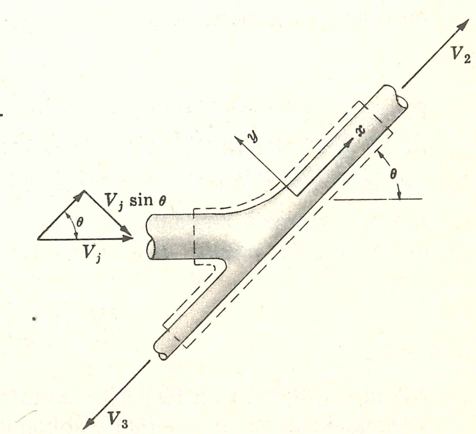


Fig. 3-24

$$F_x = 0 = \rho A_2 V_2^2 - \rho A_3 V_3^2 - \rho A_1 V_j^2 \cos\theta$$

che si semplifica in $A_1 \cos\theta = A_2 - A_3$. Aggiungendo questa espressione a quella avuta per continuità, ricaviamo:

$$A_2 = \tfrac{1}{2}(1+\cos\theta)A_1 \qquad \text{e} \qquad A_3 = \tfrac{1}{2}(1-\cos\theta)A_1$$

Scriviamo adesso l'equazione della quantità di moto nella direzione y, normale alla lastra. Abbiamo la componente secondo le y della forza che la lastra esercita sul fluido:

$$F_y = \rho A_1 V_j^2 \sin\theta$$

che con i numeri dati diventa

$$F_y = 1000/9{,}81 \times 0{,}00065 \times 30^2 \sin\theta = 60 \sin\theta \ \text{kg}_f$$

3.7. Il condotto convergente a due dimensioni di fig. 3-25 presenta una variazione lineare di sezione. La portata del fluido incompressibile è costante ed è $Q = 280$ lt/s per unità di larghezza del canale. Quanto vale l'accelerazione, in funzione della distanza x? E quale sarà il suo valore in un punto situato a 0,30 m dall'inizio della zona convergente?

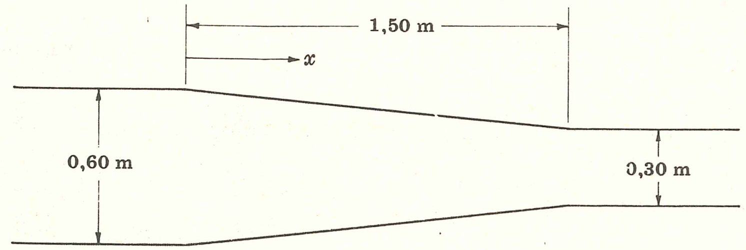


Fig. 3-25

Assumiamo che il moto sia quasi-unidimensionale, trascurando le variazioni attraverso il canale. Per continuità allora la portata sarà

$$Q = uA = u(0{,}6 - x/5)$$

in cui u, velocità nel canale, essendo Q costante è una funzione di x data dall'equazione precedente. L'accelerazione è allora

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x}$$

e trattandosi di un moto permanente è $\partial u/\partial t = 0$, e differenziando l'espressione rispetto a u abbiamo $\partial u/\partial x$, o meglio du/dx perché u dipende solo da x. Otteniamo così

$$a_x = u\frac{du}{dx} = \left(\frac{5Q}{3-x}\right)\left[\frac{5Q}{(3-x)^2}\right] = \frac{(5Q)^2}{(3-x)^3} = \frac{1{,}96}{(3-x)^3} \ \text{m/s}^2$$

misurando x in metri. Se $x = 0{,}3$ m, $a_x = 0{,}1$ m/s^2.

3.8. Poniamo che nel precedente problema il moto non sia permanente, e la portata aumenti di 50 lt/s^2 per unità di larghezza del canale. Quanto varrà l'accelerazione al momento in cui $Q = 280$ lt/s per metro di larghezza del canale?

L'accelerazione è data dalla $a_x = \partial u/\partial t + u\,\partial u/\partial x$, e $u\,\partial u/\partial x$ ha lo stesso valore visto nel problema precedente. Ma adesso $\partial u/\partial t$ non è zero:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}(0{,}6 - x/5) = 56 \ \text{lt/s}^2/\text{m} = 0{,}056 \ \text{m}^3/\text{s}^2/\text{m}$$

Allora $\partial u/\partial t = 280 \times 10^{-3}/(3-x)$ m/s^2, cioè 0,103 m/s^2 per $x = 0{,}3$ m. Allora il valore di a_x si trova sommando $\partial u/\partial t$ ed $u\,\partial u/\partial x$ e abbiamo $0{,}1 + 0{,}103 = 0{,}203$ m/s^2 come accelerazione nel punto $x = 0{,}3$ m.

3.9. Il motore a getto di fig. 3-26 sta funzionando sul banco prova. La velocità all'ingresso è di 150 m/s, mentre i gas di scarico escono a 1200 m/s. Sia l'aria all'ingresso che i gas di scarico all'uscita si trovano a pressione atmosferica. Il rapporto combustibile-aria è di 1/50; le sezioni d'ingresso e di uscita sono entrambe di 0,18 m^2. All'ingresso la densità dell'aria è di 0,127 UTM/m^3. Trovare la forza T_x necessaria per tener fermo il motore.

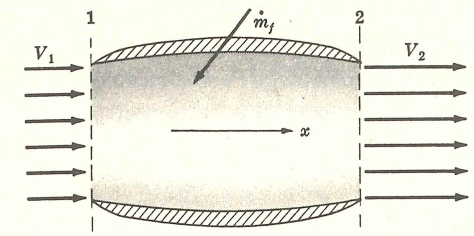


Fig. 3-26

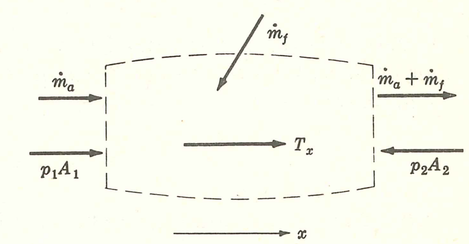


Fig. 3-27

Consideriamo, all'interno del motore, un volume di controllo che avvolge il fluido tra le sezioni 1 e 2 come in fig. 3-27. L'equazione della quantità di moto in regime permanente è

$$F_x = (\dot m_a + \dot m_f)V_{2x} - \dot m_a V_{1x}$$

in cui F_x è la forza esterna complessiva che agisce sul motore, incluse le forze di pressione e la reazione del supporto T_x. $\dot m_a$ è la portata in massa dell'aria, $\dot m_f$ quella del combustibile. Per continuità, $\dot m_a$ deve essere la stessa all'ingresso e all'uscita. Assumiamo che il combustibile sia dotato di trascurabile quantità di moto in direzione x, all' atto di entrare nel motore. Possiamo scrivere allora

$$p_1A_1 - p_2A_2 + T_x = (\dot m_a + \dot m_f)V_{2x} - \dot m_a V_{1x}$$

Essendo ora uguali le aree di ingresso e di uscita ed essendo p_1 e p_2 atmosferiche per ipotesi, abbiamo

$$T_x = (\dot m_f + \dot m_a)V_{2x} - \dot m_a V_{1x} = (\dot m_f/\dot m_a + 1)\dot m_a V_{2x} - \dot m_a V_{1x}$$

Se l'aria all'ingresso è in condizioni standard, con $\rho_1 = 0{,}127$ UTM/m^3, la variazione della portata in massa dell'aria è $\dot m_a = \rho_1 A_1 V_1 = 0{,}127 \times 150 \times 0{,}18 = 3{,}42$ UTM/s. Abbiamo allora per T_x:

$$T_x = (1/50 + 1)(3{,}42)(1200) - (3{,}42)(150) = 3650 \ \text{kg}_f$$

La spinta statica sul motore sarebbe uguale e opposta a T_x.

3.10. Consideriamo un razzo a tre stadi, progettato per ricerche nello spazio. I primi due stadi porteranno il terzo ad una distanza dalla terra sufficiente a rendere trascurabile l'attrazione gravitazionale; anche le resistenze d'attrito sono pressoché nulle. Il terzo stadio si separerà dal secondo nel momento in cui quest'ultimo raggiunge la massima altezza: momento in cui naturalmente la sua velocità rispetto la terra è zero. Il propulsore dell'ultimo stadio fornisce al getto di scarico una velocità costante, rispetto al razzo stesso, di V_0 m/s. Come si può esprimere, in funzione di opportuni parametri, la velocità finale del terzo stadio?

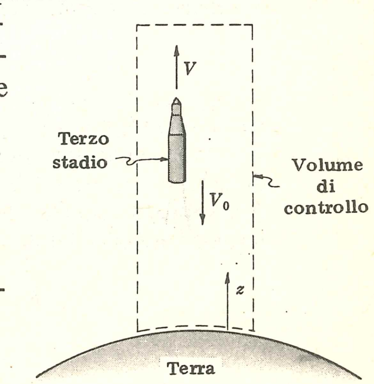


Fig. 3-28

In fig. 3-28 abbiamo un volume di controllo in forma di cilindro, che va dalla terra a una zona al di sopra del terzo stadio, contenendo il medesimo, il suo carburante e tutti i materiali di scarico. In tal modo la quantità di moto del razzo, del carburante e di tutti i materiali di scarico rimane costante. Sul volume di controllo non agisce alcuna forza esterna; allora, se M è la massa del terzo stadio e m la massa istantanea del carburante, la massa di carburante nel

razzo cambia con una velocità dm/dt, negativa perché va diminuendo. Se V è la velocità del nostro, la componente secondo le z della quantità di moto dell'assieme razzo-carburante al tempo t è $(M+m)V$, mentre quella dei gas di scarico è $\int_0^t -\frac{dm}{dt}(V-V_0)\,dt$; il bilancio della quantità di moto è allora questo:

$$0 = \frac{d}{dt}[(M+m)V] - \frac{dm}{dt}(V-V_0) = (M+m)\frac{dV}{dt} + V_0\frac{dm}{dt}$$

in cui V è la velocità assoluta del razzo in direzione z. Ma $m = m_0 + (dm/dt)t$, in cui m_0 è la massa originale di carburante al tempo $t=0$, quando parte il terzo stadio; dm/dt è una costante, che scriviamo semplicemente $\dot{m}$. Abbiamo allora

$$0 = (M + m_0 + \dot{m}t)\frac{dV}{dt} + V_0\dot{m}$$

che si può integrare da $V=0$ per $t=0$ a $V=V_f$ quando il carburante è esaurito e $m=0$. V_f è la velocità finale del terzo stadio; il carburante sarà consumato per intero al tempo $t = m_0/(-\dot{m})$. Ricordiamo che $\dot{m}$ è negativa.

$$\int_0^{V_f} dV = -\int_0^{-m_0/\dot{m}} \frac{V_0\dot{m}}{M + m_0 + \dot{m}t}\,dt \qquad \text{e} \qquad V_f = V_0 \ln\frac{M+m_0}{M}$$

3.11. In fig. 3-29 vediamo uno strato limite bidimensionale semplificato: acqua su una lastra piana. Sul bordo d'attacco la velocità è uniforme, e uguale ad U; su quello d'uscita il profilo della velocità è come in figura. Trovare la forza di taglio esercitata dal fluido sulla lastra, usando il metodo del volume di controllo.

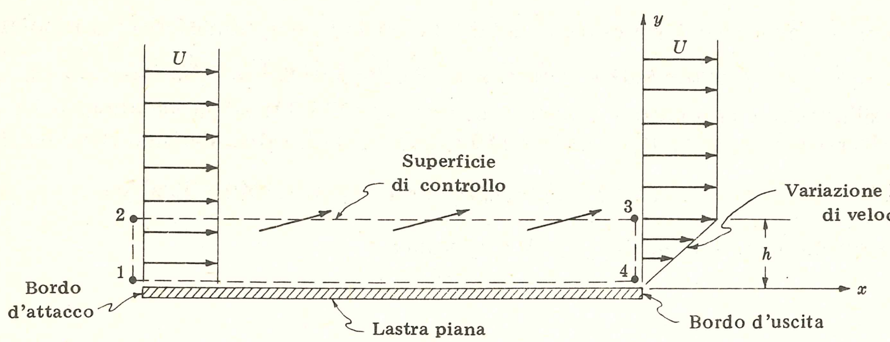


Fig. 3-29

Scegliamo un volume di controllo rettangolare, come in figura, e scriviamo

$$\mathbf{F} = \int_{\text{C.S.}} (\rho\mathbf{V})\mathbf{V}\cdot d\mathbf{A}$$

con $\mathbf{F}$ forza totale agente sul fluido. Nell'ipotesi che la pressione sia uniforme in tutta la corrente, e scrivendo l'equazione della quantità di moto nella direzione x parallela alla lastra piana, F_x è la forza di taglio esercitata sul fluido dalla lastra stessa. Attraverso la superficie 2-3 il fluido passa con una piccola velocità normale alla lastra, con una componente parallela a quest'ultima che vale quasi U. Allora il valore di F_x, per unità di larghezza della lastra, è

$$F_x = \underbrace{-\rho U^2 h}_{1\text{-}2} + \underbrace{\int_0^h (\rho U^2 y^2/h^2)\,dy}_{3\text{-}4} + \underbrace{\dot{m}U}_{2\text{-}3}$$

in cui $\dot{m}$ è la variazione di portata per unità di larghezza attraverso la superficie 2-3: $\dot{m} = \rho U h - \rho U h/2 = \rho U h/2$. Allora

$$F_x = -\rho U^2 h + \rho U^2 h/3 + \rho U^2 h/2 = -\rho U^2 h/6$$

Il fatto che F_x sia negativa indica che essa agisce sul fluido con effetto ritardante (nel senso delle x negative). La forza del fluido sulla lastra è poi uguale e opposta a F_x.

3.12. La pompa centrifuga di fig. 3-30 manda acqua alla velocità di 28 lt/s; l'ingresso dell'acqua nella girante avviene in senso radiale. Detta girante ha un diametro di 25 cm, con delle palette alte 2,5 cm, radiali sul diametro esterno. Trovare la potenza che viene fornita al rotore, che funziona a 1000 giri/min.

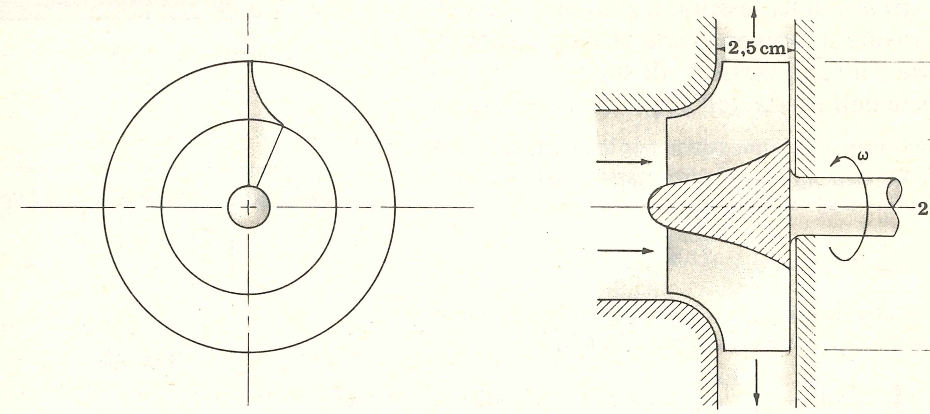


Fig. 3-30

La potenza fornita è pari al prodotto del momento torcente T agente sull'albero del rotore per la velocità angolare ω del rotore stesso. Potenza $= T\omega$. Con l'equazione del momento della quantità di moto in regime permanente, avendo la velocità angolare, si può trovare il momento torcente attorno all'asse di rotazione:

$$T_z = \int_{\text{C.S.}} (\mathbf{r}\times\mathbf{V})_z\,\rho\mathbf{V}\cdot d\mathbf{A}$$

per la quale la superficie di controllo è stata presa attorno alla girante come in fig. 3-31, così che il momento torcente che compare nell'equazione è quello esercitato dall'albero sul rotore. Nel caso di velocità costanti all'ingresso e all'uscita, avremo

$$T_z = \rho_1 Q_1 (r_2 V_{t2} - r_1 V_{t1})$$

in cui $\rho_1 Q_1 = \dot{m}$ è la variazione della portata in massa. Poiché la corrente all'ingresso si muove in direzione assiale, la locale componente tangenziale della velocità, V_{t1}, risulta uguale a zero. Avremo allora

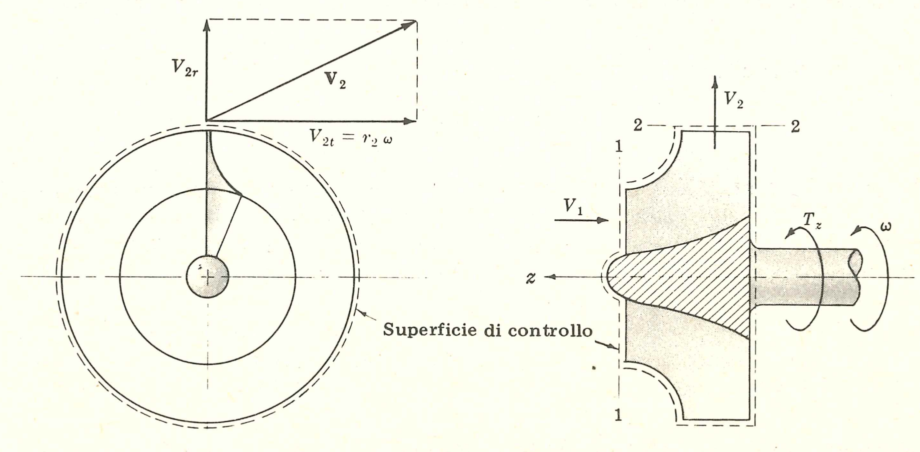


Fig. 3-31

bisogno di trovare la componente tangenziale della velocità all'uscita. Nel caso di scorrimento nullo, che il fluido cioè segua esattamente il contorno delle palette, la velocità tangenziale all'uscita è $V_{t2} = r_2\omega = 0{,}25\,(1000 \times 2\pi/60) = 26{,}2$ m/s, e il momento torcente sarà $T_z = 1000/9{,}81 \times 0{,}028 \times 26{,}2 \times 0{,}25 = 18{,}8$ kg-m. E la potenza richiesta = 18,8 (1000 x 2π/60) = 1880 kg-m/s, cioè 25 CV.

3.13. Dell'acqua esce orizzontalmente da un tubo, attraverso una fenditura da 3 mm, con la geometria di fig. 3-32. La portata è di 28 lt/s, con la velocità che varia linearmente da un massimo a un estremo della fessura, a zero all'altro estremo. Trovare il momento che viene a crearsi sull'asse del tubo verticale di supporto, in conseguenza dell'uscita dell'acqua dalla fenditura.

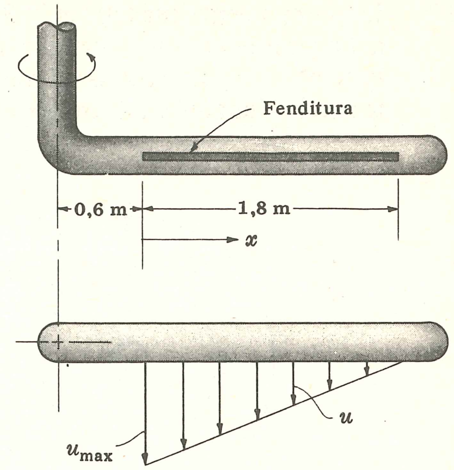


Fig. 3-32

Troviamo prima un'espressione per la distribuzione delle velocità; sia u_{max} la velocità massima all'ingresso, come in fig. 3-32. Abbiamo allora

$$u = u_{max}(1 - x/1{,}8)$$

lungo il tubo. Il valore di u_{max} si può trovare con l'equazione di continuità. La portata totale Q è

$$Q = \int_A u\,dA = \int_0^{1,8} u_{max}\,(1 - x/1{,}8)\,(0{,}003)\,dx = 0{,}028$$

e $u_{max} = 10{,}3$ m/s. Ora il momento di reazione del tubo di supporto su quello orizzontale si può trovare considerando il volume di controllo di fig. 3-33. Essendo **r** perpendicolare, $d\mathbf{A}$ parallelo a **V**, se M è il momento esercitato dal tubo di collegamento avremo

$$M = \int_{c.s.} (\mathbf{r} \times \mathbf{V})\rho\mathbf{V} \cdot d\mathbf{A} = \int_{c.s.} (ru)\rho u\,dA$$

ed essendo $r = 0{,}6 + x$ nonché $u = 10{,}3\,(1 - x/1{,}8)$ abbiamo

$$M = \rho \int_0^{1,8} (0{,}6 + x)\,10{,}3^2\,(1 - x/1{,}8)^2\,0{,}003\,dx$$

dalla quale, sviluppata per $\rho = 1000/9{,}8 = 102$ UTM/m³, ricaviamo $M = 20$ kg$_f$ - m, momento attorno all'asse del tubo di supporto, importante per trovare gli sforzi agenti sul tubo stesso. Il segno del momento è positivo, come si vede in fig. 3-33. Quello che su detto tubo viene esercitato dal tratto orizzontale è uguale, e di segno opposto ad M.

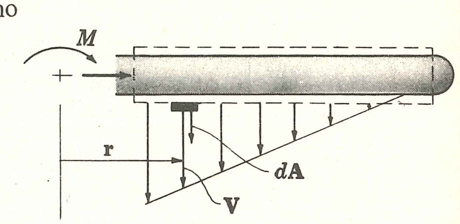


Fig. 3-33

PROBLEMI SUPPLEMENTARI

3.14. Un metodo per la produzione del vuoto è di scaricare dell'acqua attraverso un tubo di Venturi, collegando il sistema in cui si deve praticare il vuoto con la strozzatura del venturimetro, come in fig. 3-34. Che portata d'acqua sarà necessaria per produrre un vuoto di 50 cm di mercurio?

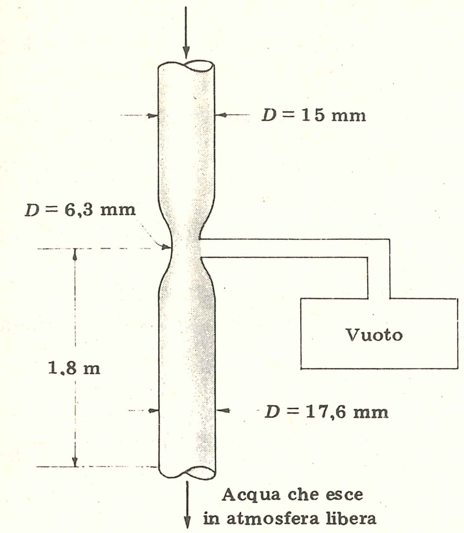


Fig. 3-34

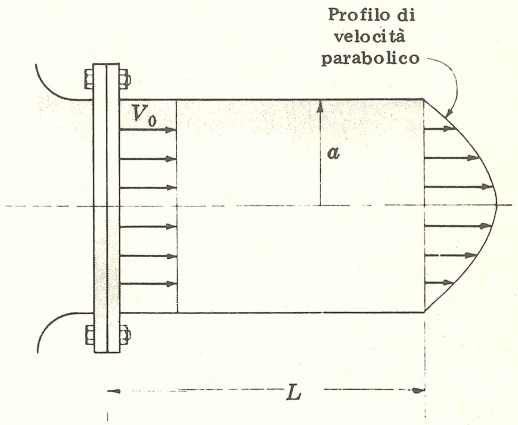


Fig. 3-35

3.15. Una tubazione circolare di raggio a m e lunga L m è collegata alla bocca raccordata d'uscita di un serbatoio per mezzo di flange e bulloni, come in fig. 3-35. Sulla sezione di flangia la velocità è costante e vale V_0; all'uscita, che scarica direttamente nell'atmosfera, il profilo di velocità è parabolico a causa dell'attrito nel tubo. Che forza debbono esercitare i bulloni per tenere a posto il tronco di tubo?

3.16. Trovare, nel problema precedente, la pressione a monte della flangia se l'azione di taglio dovuta alle azioni viscose è di τ_0 kg/cm².

3.17. Trovare la forza che il getto d'acqua esercita sulla lastra inclinata del problema 3.6 se quest'ultima si muove con velocità V_p minore di quella del getto, nella stessa direzione di questo.

3.18. Una imbarcazione viaggia a 40 km/h per propulsione a getto d'acqua; la resistenza totale è di 1360 kg. Il diametro del getto d'uscita allo scarico è di 0,60 m. Calcolare la velocità assoluta del getto.

3.19. Nella pompa a eiettore di fig. 3-36 l'area del getto è $A_j = 0{,}0045$ m², la sua velocità è $V_j = 27$ m/s, e trascina un getto secondario a velocità $V_s = 3$ m/s in un tubo dalla sezione costante, di area $A = 0{,}054$ m². Nella sezione 2 l'acqua è mescolata in tal modo, da dar luogo ad una velocità uniforme. Trascurare le azioni di taglio in corrispondenza alla parete. Trovare la pressione in corrispondenza alla sezione 2, sapendo che quella all'ugello è di 0,7 kg/cm².

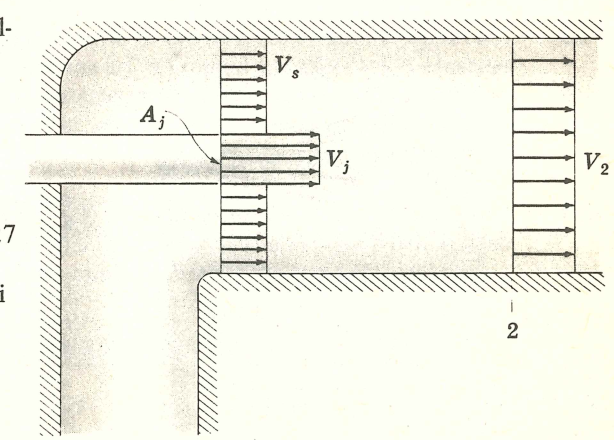


Fig. 3-36

3.20. Un fluido scorre con moto uniforme in un tubo circolare. Il profilo delle velocità è di forma parabolica, e va da zero alla parete fino a un massimo V_c in corrispondenza all'asse di simmetria del tubo. Le componenti radiale e circonferenziale della velocità sono nulle.

(1) In funzione di V_c, e di altri parametri pertinenti, trovare:

(*a*) la portata del fluido

(*b*) la quantità di moto assiale del suddetto

(*c*) l'energia cinetica

al passare del fluido in una qualsiasi sezione del tubo.

(2) Per un fluido a densità costante, trovare l'errore percentuale che si commette usando le espressioni

(*a*) $\rho A V^2$ per la quantità di moto

(*b*) $\rho A V^3/2$ per l'energia cinetica

essendo ρ la densità del fluido, A l'area della sezione trasversale del tubo, V la portata in massa divisa per il prodotto ρA.

Il profilo delle velocità è dato dall'equazione $u = V_c[1-(r/R)^2]$ in cui R è il raggio del tubo.

3.21. Dell'acqua entra da un grande serbatoio in una tubazione, uscendo dalla quale colpisce un deflettore come in fig. 3-37, subendo una deviazione di 90°. Se il deflettore risente di una spinta orizzontale di 91 kg, qual è la potenza sviluppata dalla turbina?

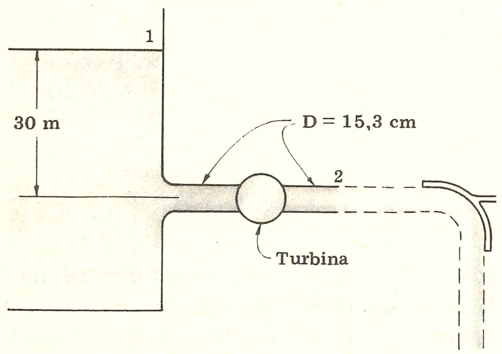


Fig. 3-37

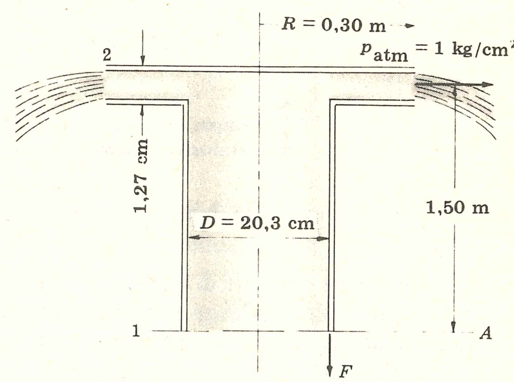


Fig. 3-38

3.22. L'acqua esce in continuità dal tubo verticale ed esce dalla zona anulare, compresa tra le due piastre di fig. 3-38, radialmente, in forma di foglio d'acqua libero. (*a*) Trascurando del tutto l'attrito, che portata avrà l'acqua attraverso il tubo se la pressione in A è di 1,7 kg/cm²? (*b*) Che forza avremo nella parete del tubo, in corrispondenza alla sezione A? Trascurare il peso proprio della tubazione.

3.23. Un veicolo si muove alla velocità di 30 m/s su di una superficie orizzontale, sotto l'azione di una forza costante $F = 455$ kg. Al tempo $t = 0$ il veicolo comincia a perdere parte della propria massa attraverso un foro nel fondo: assumiamo una portata in uscita di 4,5 kg/s. Se il veicolo continua a muoversi sotto l'azione della forza costante F, trovarne la velocità dopo 20 secondi, sapendo che la sua massa iniziale era di 910 kg.

3.24. Un serbatoio d'acqua a forma di carro (fig. 3-39) è spinto su di una superficie orizzontale senza attrito da un getto d'acqua dalla sezione di 13 cm², dotato di una velocità di 10 m/s. Il getto oltrepassa il carro e ne colpisce la parete anteriore, subendo per la curvatura di questa una deviazione verso il basso, dentro

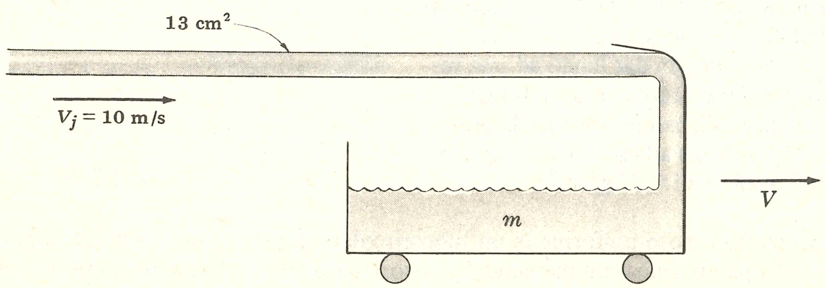


Fig. 3-39

il carro stesso: non si ha alcuna perdita d'acqua. Al tempo zero il carro è dotato di una velocità di 3 m/s, e contiene una massa di 45,5 kg d'acqua. Calcolare il tempo che il carro impiegherà per accelerare da 3 m/s a 6 m/s, nell'ipotesi che il getto d'acqua lo segua, e vi cada dentro per tutto il tempo.

3.25. Elaborare il problema 5.22 di pag. 100 usando i principi fondamentali tratteggiati nel capitolo 3.

3.26. La turbina di fig. 3-40 eroga 75 HP quando l'acqua la attraversa con moto permanente, con una portata di 550 kg/s.

La tubazione d'ingresso alla turbina ha un diametro interno di 0,30 m, quella di scarico di 0,45 m. Il resto della tubazione non è disegnato, e le pressioni d'ingresso e uscita non sono note. Ugualmente sconosciuta è la variazione di quota subita dalla tubazione suddetta.

Un manometro che collega ingresso e uscita come in figura contiene del mercurio. Calcolare lo sbilanciamento h tra le due colonnine di mercurio in condizioni di moto permanente, e dire se risulterà più alto il ramo di sinistra o quello di destra.

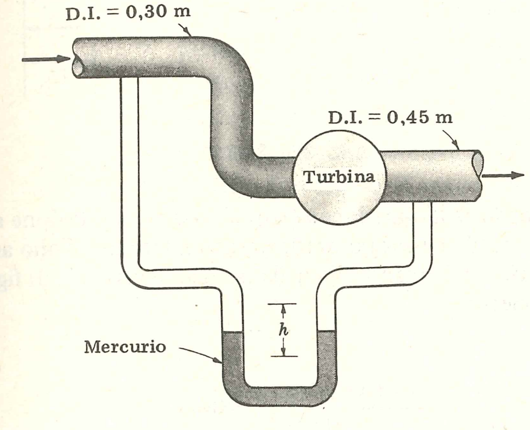


Fig. 3-40

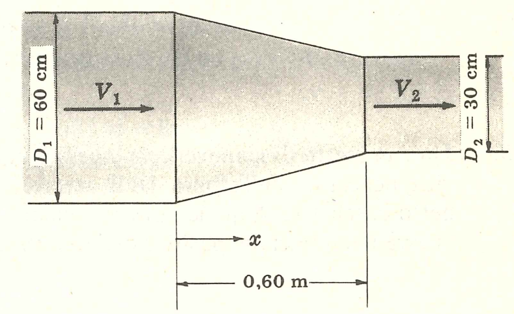


Fig. 3-41

3.27. Un tubo presenta la strozzatura di fig. 3-41. Ad un certo momento la velocità V_1 dell'acqua all'ingresso è di 10 m/s, e varia con continuità di 0,6 m/s²; trovare il gradiente di pressione (dp/dx) per $x = 0{,}30$ m quando è $V_1 = 10$ m/s, nell'ipotesi che la velocità sia uniforme in ogni sezione.

3.28. Ricavare l'equazione della quantità di moto (in funzione degli sforzi) in coordinate cilindriche, applicando la forma integrale a un adatto volume elementare.

3.29. Rielaborare il problema 3.28 in coordinate sferiche.

3.30. Analizzare i passaggi con cui vengono fissate le varie forme dell'equazione dell'energia.

3.31. Trovare nel problema 3.8 l'accelerazione, se la portata, con il valore assegnatole, diminuisce invece di aumentare.

3.32. Un cilindro con l'estremità superiore chiusa è dotato di un tubo, aperto alla pressione atmosferica, che affonda per una certa quota nel fluido incompressibile contenuto in detto serbatoio; vedi fig. 3-42. Il fluido esce da un ugello di area A_2, posto alla profondità h_1 sotto il fondo del tubo. Se l'area della sezione del cilindro è A_1, trovare la portata Q in funzione del tempo.

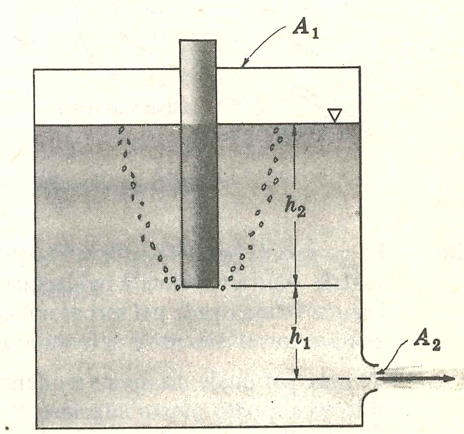


Fig. 3-42

3.33. Studiare il problema 3.11 scegliendo un volume di controllo tale che la sua superficie superiore venga a trovarsi su di una linea di corrente.

3.34. Un cilindro è posto nella corrente uniforme di un fluido incompressibile di densità ρ (fig. 3-43). In figura vediamo i profili di velocità, misurati a monte e a valle. Trovare la resistenza per unità di lunghezza incontrata dal cilindro. *Traccia:* Prendere un grande volume di controllo attorno al cilindro.

A valle e a distanza di dieci diametri, i dati di velocità sono:

y/D	u/U
0	0,5
0,5	0,6
1,0	0,8
1,5	0,9
2,0	1,0

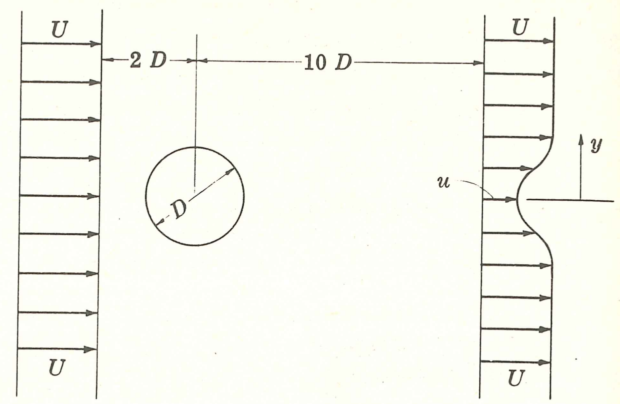


Fig. 3-43

3.35. Un cuscinetto di manovella va lubrificato passando dell'olio, di peso specifico 0,8 e a pressione atmosferica, nel centro dell'albero. Di lì, attraverso un sottile passaggio praticato con il trapano, l'olio arriva a detto cuscinetto. A quale minimo numero di giri, con la manovella nella posizione verticale di fig. 3-44, si avrà una pressione positiva dell'olio sul cuscinetto?

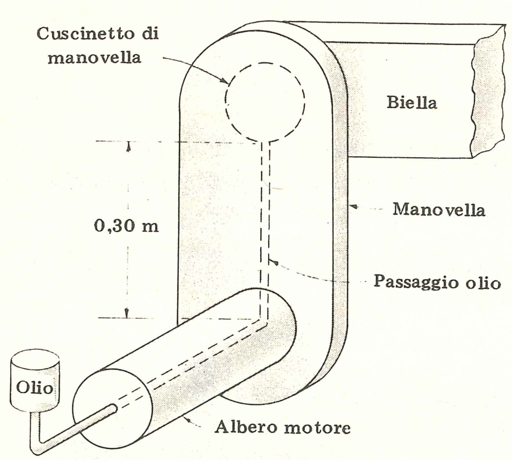


Fig. 3-44

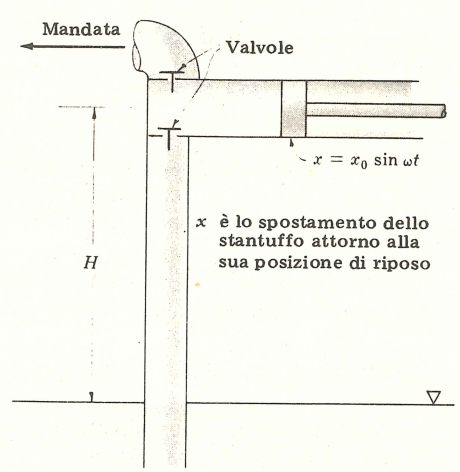


Fig. 3-45

3.36. La pompa di fig. 3-45 solleva l'acqua dal serbatoio ad un'altezza H: il suo stantuffo ha un moto sinusoidale. Alle alte velocità nell'acqua di fronte allo stantuffo insorge il fenomeno della cavitazione, e l'acqua stessa ricade nel serbatoio. Questo è un grosso inconveniente: perché la pompa riprenda a funzionare correttamente è necessario innescarla.

Trovare per quale massima frequenza del moto del pistone non si dà luogo a cavitazione, quando esso si trova al punto morto inferiore. S'intende per cavitazione la condizione in cui la pressione del fluido scende allo zero assoluto, o per lo meno vi si avvicina molto.

La frequenza massima che troviamo è dunque un valore limite; sorpassandola, la pressione sulla faccia dello stantuffo tende a cadere al di sotto dello zero assoluto, e ne risulta cavitazione e separazione della vena.

NOMENCLATURA USATA NEL CAPITOLO 3

A	=	area
$\mathbf{a}$	=	vettore accelerazione
$\mathbf{B}$	=	vettore forza di massa per unità di volume
D/Dt	=	derivata sostanziale
e	=	energia totale per unità di massa ($e = u + V^2/2 + gz$)
e_{ij}	=	tensore velocità di deformazione
E	=	energia totale
g	=	accelerazione locale di gravità
H_L	=	perdita di carico
m	=	massa
$\dot{m}$	=	portata in massa
$\mathbf{M}$	=	vettore quantità di moto
p	=	pressione
q	=	trasferimento di calore per unità di massa di fluido in moto
$\mathbf{q}$	=	vettore flusso di calore (velocità di trasferimento di calore per unità di area)
$\mathbf{q}_r$	=	vettore flusso di calore per irraggiamento
q'''	=	velocità di sviluppo di calore interno per unità di volume
Q	=	calore totale trasferito al sistema; portata volumetrica
r	=	coordinata radiale
s	=	entropia per unità di massa
S	=	entropia del sistema
t	=	tempo
T	=	temperatura assoluta
T_z	=	momento torcente attorno all'asse delle z
u	=	velocità sull'asse delle x, energia interna per unità di massa
u_i	=	velocità in direzione x_i ($i = 1, 2, 3$)
U	=	energia interna di un sistema, velocità di una corrente libera
v	=	velocità sull'asse delle y
$\mathbf{V}$	=	vettore velocità
V_t	=	velocità tangenziale
$\mathcal{V}$	=	volume
w	=	velocità sull'asse delle z
W	=	lavoro compiuto dal sistema
w	=	lavoro compiuto dall'unità di massa di fluido in modo
x_i	=	coordinate (x_1, x_2, x_3)
x, y, z	=	coordinate-corrispondono a (x_1, x_2, x_3)
α	=	angolo tra la normale alla superficie e il vettore velocità
δ_{ij}	=	delta di Kronecker, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1; & i = j \\ 0; & i \neq j \end{cases}$
θ	=	velocità di produzione di entropia per unità di volume
κ	=	conducibilità termica
μ	=	viscosità
ν	=	viscosità cinematica
ρ	=	densità
σ_{ij}	=	tensore degli sforzi, σ'_{ij} = parte taglio del tensore degli sforzi
Φ	=	funzione dissipazione
ω_{ij}	=	tensore rotazione

CAPITOLO 4

Analisi dimensionale e similitudine

4.1 SIMILITUDINE IN FLUIDODINAMICA

In fluidodinamica si ottengono risultati notevoli applicando dei criteri dimensionali: i parametri notevoli che condizionano un qualsiasi fenomeno fisico vengono riuniti in gruppi adimensionali indipendenti, che caratterizzano il moto. Detti gruppi sono spesso esattamente definiti, e identificati. Il loro nome generico è Π: si ottengono con i metodi dell'analisi dimensionale, oppure risultano dalle equazioni differenziali fondamentali, quando queste ultime vengono messe in forma adimensionale.

Consideriamo un qualsiasi problema di moto dei fluidi: per esempio la corrente che scorre su di un oggetto solido: il campo di corrente e le relative proprietà sono dettate dalla forma geometrica dell'oggetto, e dalle caratteristiche del fluido; diremo che due correnti sono simili se hanno geometrie simili, e se tutti i parametri adimensionali notevoli sono gli stessi nei due casi. Consideriamo il modellino dell'aereo in galleria del vento, e il prototipo. Le misure fatte sul primo potranno essere riferite al secondo con i metodi della similitudine, conservando una geometria simile e gli stessi Π nei due casi.

Il significato di correnti simili, o di correlazione modello-prototipo si afferra meglio considerando la forma adimensionale delle equazioni fondamentali. E' evidente che se tutte le equazioni differenziali importanti vengono rese adimensionali e le forme sono geometricamente simili, la dimensione dell'oggetto diventa irrilevante. Però i parametri adimensionali, che compaiono come coefficienti adimensionali nelle nuove equazioni, debbono essere gli stessi nei due moti considerati. Essi dipendono dalle proprietà del fluido e da una dimensione caratteristica dell'oggetto in esame, la quale viene usata come base di riferimento. Allora in moti simili le equazioni differenziali fondamentali sono identiche per modello e per prototipo. Potremo allora fare sul modello la misura di una qualsiasi variabile adimensionale, per esempio la pressione. Essa avrà lo stesso valore che sul prototipo; tornando in forma dimensionale, i dati presi sul modello potranno essere direttamente correlati al prototipo stesso.

Due correnti sono dunque simili se, ferma restando la similitudine geometrica, variabili e parametri adimensionali restano gli stessi senza riguardo per le dimensioni del fenomeno reale.

Non è sempre possibile, in pratica, ottenere gli stessi parametri adimensionali contemporaneamente per il modello e per il prototipo; tuttavia, anche se spesso si debbono accettare dei compromessi, nella maggior parte dei casi il metodo è utile, specialmente perché solo alcuni dei parametri adimensionali sono particolarmente importanti nei moti più studiati: se non sono tutti uguali non fa niente.

Andiamo a vedere adesso come diventano, in forma adimensionale, le equazioni differenziali più importanti della fluidodinamica. Prima però esaminiamo in dettaglio un altro metodo, l'analisi dimensionale: con essa troviamo i parametri adimensionali per qualsiasi problema.

Questa analisi si basa esclusivamente sul teorema Pi Greco di Buckingham, ed è un metodo per trovare i parametri adimensionali fondamentali, senza conoscere le relative equazioni differenziali. E' necessario comunque conoscere le variabili pertinenti nel singolo problema: esse vanno assiemate in tanti gruppi adimensionali indipendenti, o Π quanti è possibile ricavarne; in proposito un metodo sistematico viene presentato nel problema 4.8 di pag. 70. Se il vantaggio del sistema, nel caso di problemi complessi, è che non c'è bisogno di conoscere le equazioni, o leggi, fondamentali, bisogna comunque avere a disposizione tutte le variabili, e solo tra queste quelle importanti vanno usate nel trattare il problema. L'introduzione di una variabile estranea, o l'omissione di una pertinente, è sufficiente a far saltare l'analisi. Si tratta di condizioni impegnative: è più sicuro partire dalle equazioni giuste. Ad ogni modo, una volta determinati i parametri, si possono ricavare dei dati sperimentali, correlandoli ai primi sotto forma adimensionale.

Il numero di Π necessario a trattare un dato problema è fisso, e quasi sempre si tratta del numero di variabili complessive, meno il numero di dimensioni fondamentali nel sistema di unità di misura: in meccanica ne abbiamo tre. La scelta sarebbe arbitraria, ma quelle più usate sono massa, lunghezza e tempo; nel moto compressibile si aggiunge la temperatura, così ne avremo quattro.

Come si è detto, il numero di Π indipendenti per un certo problema è fisso: moltiplicandoli e dividendoli tra loro se ne possono ottenere degli altri, ma l'insieme fondamentale resta sempre lo stesso. In fluidodinamica i gruppi adimensionali interessanti sono sempre gli stessi, ed hanno un loro ben preciso significato fisico.

Trovato un insieme di Π, essi possono essere espressi in forma funzionale, cioè uno in funzione di tutti gli altri; è una forma che non deriva dall'analisi dimensionale ma solo dalla soluzione delle equazioni fondamentali, oppure dalle prove sperimentali. In queste ultime risulta molto conveniente esprimere i risultati in forma adimensionale, come tanti diagrammi dei vari Π: si trovano così le varie correlazioni. A parte il fatto che così scompare la scala usata per la prova, la forma adimensionale riduce almeno di tre il numero di variabili in gioco. Si tratta di uno strumento indispensabile in tutti gli esperimenti, sia scientifici che d'ingegneria.

4.2 PARAMETRI DEL MOTO INCOMPRESSIBILE

Il moto incompressibile può essere descritto completamente dalle sole equazioni del moto e della continuità. Abbiamo quattro variabili dipendenti, le tre componenti di velocità e la pressione, che compaiono in quattro equazioni. Per formulare i parametri Π abbiamo anche le proprietà del fluido, viscosità e densità, nonché il potenziale gravitazionale.

Se introduciamo le seguenti variabili adimensionali indipendenti e dipendenti (caratterizzate dall'asterisco), le equazioni si possono scrivere in forma adimensionale, o normale.

$$p^* = p/\rho V_0^2, \quad \mathbf{V}^* = \mathbf{V}/V_0, \quad t^* = t/t_0 = tV_0/L, \quad \mathbf{r}^* = \mathbf{r}/L, \quad \psi^* = \psi/gL \tag{4.1}$$

in cui l'indice zero indica un valore caratteristico; L è una dimensione fondamentale. Se dovessimo ad esempio considerare il moto esterno ad un cilindro, L potrebbe essere il diametro e V_0 la velocità della corrente indisturbata. ψ è il potenziale gravitazionale. In funzione di queste variabili, la forma vettoriale dell'equazione del moto si può scrivere

$$\frac{\partial \mathbf{V}^*}{\partial t^*} + \nabla^*(V^{*2}/2) - \mathbf{V}^* \times (\nabla \times \mathbf{V}^*) = -\nabla^* p^* + \frac{1}{N_R}\nabla^{*2}\mathbf{V}^* - \frac{1}{F_r}\nabla^*\psi^* \tag{4.2}$$

e l'equazione di continuità è

$$\nabla^* \cdot \mathbf{V}^* = 0 \tag{4.3}$$

Qui N_R è il numero di Reynolds $\rho L V_0/\mu$, F_r il numero di Froude V_0^2/gL, in cui ρ è la densità e μ la viscosità assoluta, o dinamica. Sono due gruppi adimensionali, e rappresentano i due parametri che debbono essere uguali perché sussista la similitudine. Il numero totale di parametri

in cui μ è la viscosità, c_p il calore specifico a pressione costante, κ la conducibilità termica, α la diffusività termica, definita come $\kappa/\rho c_p$.

Il numero di Prandtl ha una notevole importanza nello studio della trasmissione del calore convettiva; infatti il prodotto $N_R\ P_r$ misura fisicamente il rapporto tra la trasmissione di calore per convezione e quella per conducibilità termica. Per la maggior parte dei gas P_r è dell'ordine dell'unità, mentre per i liquidi può variare tra 0,1 e 0,001. Se in un fluido la trasmissione del calore è importante, N_R dovrà essere piccolo; in natura esso di solito è piuttosto grande, ben maggiore dell'unità, cosicché domina la trasmissione per convezione; tuttavia, in certe situazioni di interesse ingegneristico, N_R può essere più piccolo dell'unità, e nella trasmissione del calore sia la conduzione diretta che la convezione diventano importanti. Questo succede per esempio nel caso del sottile film di olio lubrificante che si incontra nei cuscinetti.

Diverse altre combinazioni delle variabili che abbiamo visto possono formare altri gruppi adimensionali, che non sono comunque indipendenti da quelli che abbiamo già visto; in alcuni problemi di ingegneria conviene introdurli. Talvolta il termine Φ^* si scrive nella forma $\kappa B_r/N_R P_r \Phi^*$, in cui B_r è il numero di Brinkman $B_r = \mu V_0^2/\kappa T_0$. Inoltre il rapporto B_r/P_r costituisce talvolta il numero di Eckert E_c. E' chiaro allora che la forma dei Π non è indipendente, e in aggiunta a N_R, P_r e k (rapporto tra i calori specifici c_p/c_v) dell'equazione dell'energia potremo sceglierne solo uno tra M_o, B_r, E_c. Esiste un secondo numero di Reynolds N'_R, basato sul secondo coefficiente di viscosità, ma è importante solo in certi problemi, come l'attenuazione e la dispersione del suono.

Possiamo allora riassumere i gruppi adimensionali che regolano le prove su modelli nelle correnti compressibili e incompressibili:

- N_R, lo stesso per il moto viscoso e nell'aerodinamica subsonica.
- M_0 e k, nelle correnti ad alta velocità compressibili e supersoniche.
- N_R, M_0, nello strato limite compressibile.
- P_r, trasmissione del calore.
- N_R, M_0, P_r, strato limite compressibile e trasmissione del calore.
- N_R, F_r, modelli marini.

Solo un numero può di solito restare lo stesso per modello e prototipo contemporaneamente: possono quindi essere necessari diversi esperimenti per ripetere sul modello i vari effetti che interessano; simile procedimento può diventare piuttosto complesso, e qui non ne faremo cenno. Comunque si possono avere molto spesso due parametri contemporaneamente uguali, per esempio k ed M_0. Quando sia il modello che il prototipo si trovano in aria, k risulta lo stesso; usando una scala opportuna anche M_0 può risultare lo stesso.

4.4 ALTRI PARAMETRI INTERESSANTI NELLA TRASMISSIONE DEL CALORE LIBERA CONVETTIVA NEI FLUIDI

L'equazione del moto può essere ulteriormente complicata da un altro fattore: gli effetti di spinta statica, che danno luogo ad una convezione libera quando esistono dei gradienti termici provocanti a loro volta dei gradienti di densità. Assumiamo qui che il fluido sia essenzialmente incompressibile, con un coefficiente di dilatazione volumetrica a temperatura β.

L'equazione del moto è

$$\rho[\partial \mathbf{V}/\partial t + (\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V}] = -\rho\beta g(T - T_0) + \mu\nabla^2\mathbf{V} \qquad (4.12)$$

in cui vengono trascurati gli effetti di compressibilità. In questi problemi non esiste di solito una velocità di riferimento; definiamo allora velocità, tempo e temperatura adimensionali:

$$\mathbf{V}^\dagger = \mathbf{V}L\rho/\mu, \quad t^\dagger = t\mu/\rho L^2, \quad \Theta = (T - T_0)/(T_1 - T_0) \qquad (4.13)$$

in cui $T_1 - T_0$ è un salto di temperatura caratteristico del sistema, così che la (4.12) diventa

$$\partial\mathbf{V}^\dagger/\partial t^\dagger + (\mathbf{V}^\dagger\cdot\nabla^*)\mathbf{V}^\dagger = -\nabla^{*2}\mathbf{V}^\dagger + \Theta G_r \qquad (4.14)$$

G_r è il numero di Grashof, $g\rho_0^2\beta(T_1 - T_0)L^3/\mu^2$.

Nella convezione libera il numero di Reynolds non è importante, e non se ne tiene conto. Nell'equazione dell'energia di solito si trascura la dissipazione, mentre gli effetti di compressibilità sono trascurabili; in forma adimensionale avremo allora

$$\frac{D\Theta}{Dt^\dagger} = \frac{1}{P_r}\nabla^{*2}\Theta \qquad (4.15)$$

Quindi nella convezione libera sono importanti solo i numeri di Grashof e di Prandtl.

BIBLIOGRAFIA

1. Birkhoff G., *Hydrodynamics*, Dover Publications, 1955.
2. Bridgman P.W., *Dimensional Analysis*, Yale University Press, 1931.
3. Buckingham E., "On Physically Similar Systems", *Physical Review*, vol. 4, ser. 2, p. 345, 1914.
4. Langhoar H. L., *Dimensional Analysis and the Theory of Modeling*, John Wiley, 1951.
5. Di Ricco G., *Idraulica*, Ateneo, Roma 1963.
6. De Marchi G., *Idraulica*, Hoepli, Milano 1939.
7. Giles R.V., *Meccanica dei fluidi e idraulica*, Etas Libri, Milano 1975.

PROBLEMI RISOLTI

4.1. In un moto incompressibile dipendente dal tempo per oscillazioni di periodo τ dovute a un corpo immerso in un fluido, quali sono i parametri caratteristici del moto stesso?

Per un moto incompressibile, l'unico coefficiente adimensionale è il numero di Reynolds; risolvendo rispetto a un periodo adimensionale τ^* pari a $\tau V_0/L$, possiamo scrivere

$$\tau^* = \tau V_0/L = f(N_R)$$

Il gruppo adimensionale $\tau V_0/L$ è noto come numero di Strouhal. Dette oscillazioni si verificano durante la formazione dei vortici di Karman nella scia, e saranno discusse nel capitolo 5.

4.2. Di quali nuovi parametri bisogna tener conto, nei problemi che riguardano la tensione superficiale T_s?

Le equazioni del moto sono le stesse di quando non ci sono gli effetti della tensione superficiale, ma le condizioni al contorno sono diverse. All'interfaccia liquido-aria la forza di pressione dev'essere equilibrata dalla tensione superficiale, che non è necessariamente zero, come si verifica su di una superficie libera in assenza di detta tensione superficiale. Ricordiamo che una differenza finita di pressione può esistere attraverso un'interfaccia, quando quest'ultima è dotata di curvatura, ed essere equilibrata dalla tensione superficiale. Consideriamo il caso bidimensionale di fig. 4-1: dall'equilibrio abbiamo

$$2T_s(d\theta/2) = pR\,d\theta$$

in cui R è il raggio di curvatura della superficie, e $\sin\theta \simeq \theta$ per piccoli θ. Possiamo allora scrivere

$$T_s = p^*R^*(\rho_0 V_0^2 L)$$

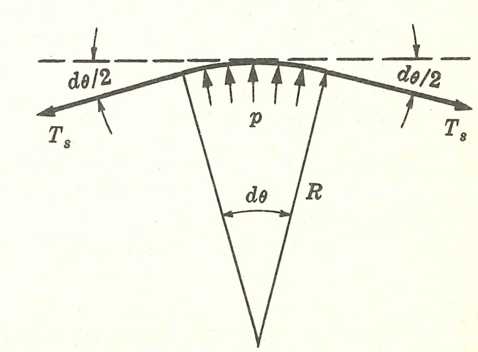


Fig. 4-1

introducendo pressione adimensionale e raggio di curvatura: $p^* = p/\rho_0 V_0^2$ e $R^* = R/L$. Definiamo la tensione superficiale adimensionale T_s^* come

$$T_s^* = T_s/\rho_0 V_0^2 L$$

così che

$$T_s^* = p^* R^*$$

Il parametro adimensionale $\rho_0 V_0^2 L/T_s$ è chiamato numero di Weber.

4.3. In un liquido poco profondo le piccole perturbazioni superficiali si propagano come in fig. 4-2; da quali parametri dipenderà la velocità dell'onda superficiale infinitesima? Quali sono i gruppi adimensionali pertinenti?

Per l'onda in figura la velocità a può dipendere dalla profondità h e dalla gravità g. Il solo gruppo adimensionale che possiamo formare è

$$\Pi = a^2/gh$$

Essendo tre le variabili e due le unità fondamentali (lunghezza e tempo), possiamo avere solo un Π. E poiché c'è solo un Π nel problema, dobbiamo dire che si tratta di una costante:

$$\Pi = a^2/gh = \text{costante}$$

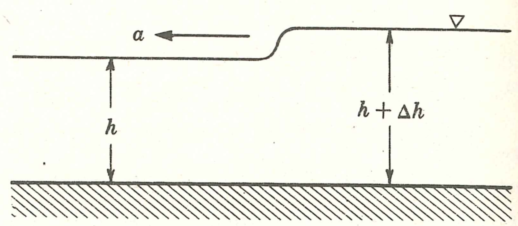


Fig. 4-2

Si dà qui il caso che la costante sia pari all'unità, e $a = \sqrt{gh}$, ma questo non si poteva trovare con l'analisi dimensionale.

Qui un'altra cosa da ricordare è che la densità del fluido non ha importanza. All'inizio però potevamo anche non saperlo, e la sua introduzione ci avrebbe condotto a Π irrilevanti, e conclusioni magari errate. Se non si parte con le equazioni fondamentali, è sempre un problema sapere quali sono le variabili importanti.

4.4. Se in una tubazione in cui scorre acqua viene chiusa bruscamente una valvola, si genera un'onda di colpo d'ariete: possono nascere delle pressioni enormi, capaci di danneggiare la tubazione. Trovare con l'analisi dimensionale il valore della massima pressione generabile.

Adotteremo come parametri fondamentali la pressione massima p_{max}, la densità ρ, la velocità iniziale della corrente U_0, il modulo volumetrico β (perché in qualche modo l'onda dev'essere un'onda di compressione). Qui abbiamo due possibili Π indipendenti: possiamo prendere

$$p_{max}/\beta \quad \text{e} \quad U_0^2\rho/\beta$$

E possiamo allora scrivere

$$p_{max}/\beta = f(U_0^2\rho/\beta)$$

Questo è tutto quello che possiamo ottenere dall'analisi dimensionale; risulta in effetti che $p_{max}/\beta = (U_0^2\rho/\beta)^{1/2}$, così che $p_{max} = \sqrt{\rho\beta}\, U_0$, ma questo si può sapere solo risolvendo le pertinenti equazioni differenziali.

Come nel problema precedente, si può dire qualcosa circa la velocità a di propagazione di quest'onda di colpo d'ariete, che dipende dalla densità ρ e dal modulo volumetrico β (se uno è abbastanza fortunato da pensarci), e allora l'unico Π che si può mettere insieme è $a^2\rho/\beta$, e dev'essere una costante. Quindi la velocità effettiva è ancora $\sqrt{\beta/\rho}$.

4.5. Come si può riprodurre su modello la portanza di un profilo, in aerodinamica subsonica?

La portanza che agisce su un corpo si può trovare integrando le giuste componenti della forza normale di pressione che agisce sulla superficie del corpo stesso. La pressione a sua volta si deduce dall'equazione del moto. Nel moto permanente la pressione adimensionale dipende dalla collocazione $\mathbf{r}^*$ del corpo e dal

numero di Reynolds; però la dipendenza da quest'ultimo solitamente è piccola, anzi se il flusso segue un andamento a linee di corrente, come nel caso degli effettivi profili, detta dipendenza è trascurabile. Per una forma geometrica assegnata la pressione si può integrare sul corpo per eliminare la dipendenza da $\mathbf{r}^*$ nel cercare la portanza L. Comunque, anche per una forma geometrica assegnata, la portanza dipende dall'angolo d'incidenza θ (angolo relativo sotto cui la corrente indisturbata intercetta il corpo).

Con riferimento alla fig. 4-3, abbiamo

$$L = -\int_A p\,\hat{\mathbf{y}} \cdot d\mathbf{A}$$

in cui $\hat{\mathbf{y}}$ è un vettore unitario in direzione y; allora

$$L^* = \frac{L}{\rho V_0^2 A_0} = -\int p^*\,\hat{\mathbf{y}} \cdot d\mathbf{A}^* = f(\theta)$$

con A_0 area caratteristica del profilo e $A^* = A/A_0$.
Dunque la portanza si può scrivere così:

$$L = C_L(\theta)\,\rho V_0^2 A_0^2/2$$

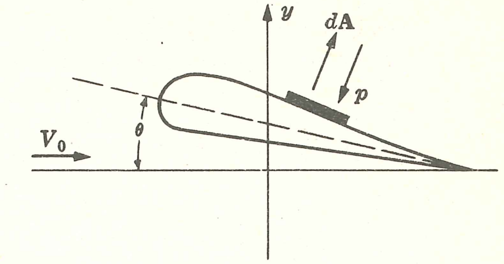


Fig. 4-3

dove C_L è il coefficiente di portanza. Il coefficiente 2 si introduce per convenzione, in modo che $\rho V_0^2/2$ equivalga ad una pressione dinamica. Nelle prove il coefficiente di portanza viene di solito rappresentato come una funzione di θ, per un profilo di forma assegnata.

4.6. Come si può riprodurre su modello la resistenza, in aerodinamica subsonica?

La resistenza è causata primariamente dall'attrito superficiale; se poi il corpo non è profilato si formerà una scia, e la bassa pressione in questa presente predominerà sull'attrito superficiale (resistenza viscosa da strato limite). Nel moto attorno a un profilo esiste anche una resistenza indotta dovuta alla variazione dell'angolo d'attacco effettivo, causata questa dal *downwash*, deviazione del flusso dell'elica verso il basso. La portanza, che dev'essere perpendicolare alla corrente indisturbata locale, viene invece a presentare una componente in direzione di detta corrente (opposta cioè alla direzione del moto del corpo nel fluido).

La resistenza indotta D si può porre in funzione di un integrale di pressione, e come nel caso della portanza possiamo scrivere

$$D = C_D\,\rho V_0^2 A_0/2$$

essendo $C_D(\theta)$ il coefficiente di resistenza.

Se consideriamo corpi non profilati, nei quali la maggior parte della resistenza è dovuta alla componente viscosa e alla scia in bassa pressione, la corrente risulta altamente sensibile al numero di Reynolds (come non accade per portanza e per resistenza indotta). Potremo dire che l'attrito superficiale e la resistenza di scia debbono essere una funzione del numero di Reynolds, per una data forma geometrica. Avremo sempre l'influenza dell'angolo d'incidenza, ma faremo l'ipotesi che quest'ultimo resti costante, mentre varia il numero di Reynolds. Nel caso di corpi non profilati poi, detto angolo non ha proprio importanza: variarlo sarà come variare la geometria. Potremo allora porre la resistenza in forma adimensionale:

$$D^* = \frac{D}{\rho V_0^2 A_0/2} = f(N_R) = C_D(N_R)$$

e rimane così il concetto di coefficiente di resistenza, che per una data geometria non è costante, ma dipende da N_R. Nel caso generale potremo dire per un profilo qualsiasi, che lo strato limite si separi o no,

$$C_D = f(N_R, \theta)$$

4.7. La caduta di pressione in una tubazione dipende dall'attrito alle pareti, che a sua volta dipende dal fatto che il moto sia laminare o turbolènto; nel primo caso l'attrito in parete dipende dalla viscosità, nel secondo dal numero di Reynolds e dalla scabrosità della parete. Come si può riprodurre in modello questa caduta di pressione?

Il calcolo della caduta di pressione Δp in un tubo lungo L è fatto basandosi sull'equazione del moto; quindi la caduta di pressione adimensionale per unità di lunghezza di tubazione deve dipendere dal numero di Reynolds e dalla rugosità della parete, rappresentabile quest'ultima come rapporto tra l'altezza media delle asperità superficiali e il diametro: ϵ/D. Allora

$$\frac{\Delta p^*}{L^*} = h(N_R, \epsilon/D)$$

definendo la lunghezza adimensionale L^* come L/D; D è il diametro del tubo, h una funzione di N_R e della rugosità di parete. In funzione della pressione p,

$$\frac{\Delta p^*}{L^*} = \frac{\Delta p}{\rho V^2}\frac{D}{L} = h(N_R, \epsilon/D)$$

Ora la perdita di carico in metri è H_L (in unità tecniche), e possiamo scrivere

$$H_L = \frac{\Delta p}{\rho g} = \frac{\Delta p^*}{L^*}\frac{V^2 L}{Dg}$$

e

$$H_L^* = H_L \frac{Dg}{V^2 L} = h(N_R, \epsilon/D) = f/2$$

La funzione di N_R e della rugosità è scritta come $f/2$, parametro adimensionale in cui f è il coefficiente d'attrito, dipendente dal numero di Reynolds e, se il moto è turbolento, anche dalla rugosità. Infine,

$$H_L = \frac{fL}{D}\frac{V^2}{2g}$$

Per risolvere i problemi del moto nelle tubazioni è di importanza vitale disporre di dati sperimentali sui coefficienti d'attrito.

4.8. Risolvere il problema 4.7 applicando il metodo Pi Greco di Buckingham; consideriamo il moto di un fluido in una tubazione, trovandone i parametri Π determinanti.

Dobbiamo prima indovinare le grandezze fisiche interessanti; assumiamo che siano le seguenti (M, L, T indicano rispettivamente massa, lunghezza e tempo):

Grandezza fisica	V	D	ρ	μ	ϵ	dp/dx
Dimensione	LT^{-1}	L	ML^{-3}	$ML^{-1}T^{-1}$	L	$ML^{-2}T^{-2}$

in esse ϵ è un valor medio della rugosità di parete, dp/dx la variazione di pressione per unità di lunghezza, misurato nella direzione del moto.

Abbiamo sei grandezze fisiche e tre dimensioni fondamentali: avremo un massimo di tre termini Π andiamo a determinarli, prendendo quattro grandezze fisiche alla volta.

$$V^{x_1} D^{y_1} \rho^{z_1} \mu = (LT^{-1})^{x_1} L^{y_1} (ML^{-3})^{z_1} ML^{-1}T^{-1} = M^0 L^0 T^0$$

Allora $\quad L \rightarrow x_1 + y_1 - 3z_1 - 1 = 0, \quad M \rightarrow z_1 + 1 = 0, \quad T \rightarrow -x_1 - 1 = 0$

da cui $z_1 = -1$, $x_1 = -1$, $y_1 = -1$. Perciò

$$\Pi_1 = \mu/\rho VD \quad \text{ovvero} \quad \Pi_1 = \rho VD/\mu$$

Con lo stesso procedimento possiamo prendere

$$D^{x_2} \rho^{y_2} \mu^{z_2} \epsilon = M^0 L^0 T^0 \quad \text{e} \quad V^{x_3} \rho^{y_3} D^{z_3} dp/dx = M^0 L^0 T^0$$

ottenendo

$$\Pi_2 = \epsilon/D, \qquad \Pi_3 = \frac{(dp/dx)D}{\rho V^2}$$

Abbiamo allora $\Pi_3 = h(\Pi_1, \Pi_2)$ e

$$\frac{(dp/dx)D}{\rho V^2} = h(\rho VD/\mu, \epsilon/D) = h(N_R, \epsilon/D)$$

con h che indica una relazione funzionale.

Con la sperimentazione si determina poi la relazione funzionale tra queste quantità la cui descrizione grafica (diagramma di Moody, o di Stanton) è riportata nel capitolo 5.

L'utilità delle grandezze adimensionali risulta evidente in questo esempio: se avessimo dovuto seguire la variazione di ognuna delle cinque quantità, in modo indipendente l'una dall'altra, avremmo avuto davanti un'enorme mole di lavoro sperimentale; riducendoci invece a tre quantità adimensionali, possiamo ragionevolmente pensare ad un completo programma di prove.

La perdita di carico in una tubazione lunga L si scrive di solito come $H_L = \Delta p/\rho g$, con Δp pari alla caduta di pressione nel tubo. Allora $\Delta p/L = dp/dx$, e potremo scrivere, usando i risultati già visti,

$$H_L^* = H_L \frac{Dg}{V^2 L} = \frac{(dp/dx)D}{\rho V^2} = \text{funzione di } (N_R, \epsilon/D) = f/2$$

in cui f è il coefficiente d'attrito, definito dall'equazione ora vista. Potremo allora esprimere la perdita di carico in funzione di detto coefficiente d'attrito: $H_L = (fL/D)(V^2/2g)$.

4.9. Un profilo alare dalla superficie maestra di 930 cm² deve dare in galleria del vento una portanza L. Con un angolo d'incidenza di 5° alla velocità di 30,5 m/s in aria standard di densità 1,24 kg/m³, si misura una portanza di 31,4 newton. Quanto vale il coefficiente di portanza C_L? Per un'ala prototipo di superficie 9,3 m² con lo stesso angolo d'incidenza di 5° e una velocità all'aria di 160,9 km/h, quanto vale la portanza L_p?

C_L si può calcolare con i dati presi sul modello:

$$C_L = \left(\frac{L}{A\rho V_0^2/2}\right)_m = \frac{31{,}4}{(0{,}0930)\,(1{,}24)\,(30{,}5)^2/2} = 0{,}58$$

Per il prototipo avremo lo stesso C_L, e possiamo calcolare la portanza L_p:

$$L_p = (C_L A \rho V_0^2/2)_p = (0{,}58)\,(9{,}3)\,(1{,}24)\,(160900/3600)^2/2 = 6700 \text{ N}$$

4.10. Discutere la prova su modello di una pompa, o di un ventilatore, in un fluido incompressibile.

La logica del modello è essenzialmente la stessa, che si tratti di una macchina centrifuga o di una assiale. I parametri più importanti per descrivere le prestazioni di una macchina del genere sono la potenza all'ingresso P, la prevalenza H generata attraverso la macchina, il rendimento η. Per una geometria assegnata poi la prestazione è influenzata dalle relative variabili: ρ, densità del fluido; ω, velocità angolare del rotore; D, diametro medio del suddetto; μ, viscosità del fluido, e Q, portata del medesimo.

P, gH ed η non sono indipendenti: sono funzioni delle variabili già viste; conviene chiamare gH la prevalenza perché gH, e non H, rappresenta il lavoro sull'albero per unità di massa fluida, ed è indipendente da g. Scriveremo allora

$$P = f_1(\rho, \omega, D, Q, \mu)$$

$$\eta = f_2(\rho, \omega, D, Q, \mu)$$

$$gH = f_3(\rho, \omega, D, Q, \mu)$$

Applicando ad ogni equazione il teorema di Buckingham otteniamo un adatto insieme di parametri Π:

$$P/\rho\omega^3 D^5 = f_4(Q/\omega D^3, \rho\omega D^2/\mu)$$

$$\eta = f_5(Q/\omega D^3, \rho\omega D^2/\mu)$$

$$gH/\omega^2 D^2 = f_6(Q/\omega D^3, \rho\omega D^2/\mu)$$

E' importante notare qui che i Π ($P/\rho\omega^3 D^5$, $gH/\omega^2 D^2$ ed η) non sono indipendenti: una volta noti gli altri Π, essi risultano determinati.

Sappiamo dai dati sperimentali che la viscosità, e quindi il Π $\rho\omega D^2/\mu$, non ha grande importanza nel calcolo delle prestazioni di una pompa o di un ventilatore: possiamo trascurarla, ricavando allora per una data configurazione

$$gH/\omega^2D^2 = f_7(Q/\omega D^3), \quad P/\rho\omega^3D^5 = f_8(Q/\omega D^3), \quad \eta = f_9(Q/\omega D^3)$$

I dati sperimentali vengono di solito riportati in forma di diagramma dei Π gH/ω^2D^2, $P/\rho\omega^3D^5$ ed η, in funzione di $Q/\omega D^3$,per ciascuna macchina.

PROBLEMI SUPPLEMENTARI

4.11. Durante la prova al tunnel del vento di un'ala subsonica si raccolgono i seguenti dati:

Portanza (kg)	0	4,5	5,4	6,3	5,4	3,6
Angolo d'incidenza, θ	0°	5°	10°	15°	20°	25°

Il modello viene provato in aria standard, alla velocità di 30 m/s. La superficie dell'ala del modello è di 0,093 m^2.

Tracciare il diagramma del coefficiente di portanza C_L in funzione dell'angolo θ. Se l'ala del prototipo ha una superficie di 9,3 m^2, quale sarà la portanza per una velocità all'aria di 160 km/h ed un angolo d'incidenza di 5°?

4.12. Un nuovo tipo di rivestimento interno per oleodotti viene applicato per prova a un tubo dal diametro interno di 12 pollici, che per un tratto di 30,5 m vien fatto percorrere da acqua a temperatura ambiente, a portate variabili. Vengono raccolti i seguenti dati:

Caduta di pressione attraverso il tubo (m d'acqua)	0,0033	0,024	0,085	4,6
Portata (lt/s)	10,8	30	60	490

Tracciare il diagramma del coefficiente di attrito f (definito nel problema 4.7) in funzione del numero di Reynolds. Per un tubo reale dal diametro interno di 12 pollici, quale caduta di pressione in kg/cm^2 per chilometro si avrebbe per una portata di 312 lt/s di greggio? Si converta la caduta di pressione in metri di olio e in metri d'acqua.

4.13. Il modello della carenatura di un radar, di forma emisferica, dev'esser provato in galleria del vento per rilevarne la portanza e il relativo coefficiente C_L. La carenatura reale sarà soggetta a venti artici da 160 km/h, a temperature di −40°C. Se il diametro del modello dev'essere da 0,30 m, mentre l'originale è di 15,20 m, quale dovrà essere la velocità di un'aria standard nel tunnel del vento, e riveste detta velocità effettiva importanza? Qui si può ricavare il modello in base al numero di Reynolds?

4.14. Il carrello carenato non retrattile di un aereo leggero viene provato con un modello 1:3 in una piccola galleria del vento, per determinarne la resistenza. Si usa aria standard; l'area frontale proiettata del modello è di 0,046 m^2. Per avere la resistenza che il prototipo incontrerà alla velocità di crociera di 160 km/h, a che velocità bisogna mandare l'aria nella galleria? Alla giusta velocità, si misura una resistenza di 9,1 kg; quanto avremmo sul carrello reale, alla velocità di crociera? Qual è il coefficiente di resistenza C_D?

4.15. Lo stramazzo di fig. 4-4 può esser costituito da una fessura praticata in una diga o da uno sbarramento in un canale aperto, e si usa per misurare la portata. Esso può essere di forma variabile; l'altezza H dell'acqua nello stramazzo misura la portata. Dimostrare che per lo stramazzo triangolare di figura, se l'acqua è abbastanza profonda e si trascurano gli effetti della tensione superficiale e della viscosità, la portata Q può essere approssimata dalla $Q = C\sqrt{g}\,H^{5/2}$ in cui C è una costante; si deduce dalla tecnica sperimentale che detta C è data dalla $C = 0{,}44 \tan \frac{1}{2}\theta$.

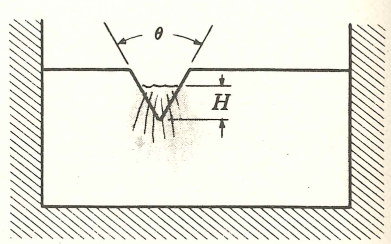


Fig. 4-4

4.16. La portata che attraversa una tubazione si può misurare tramite il diaframma di fig. 4-5; i manometri, installati prima e dopo il suddetto, danno la caduta di pressione attraverso l'orifizio in esso praticato; da questa, per un dato fluido, si può ricavare la portata. Nell'ipotesi che quest'ultima dipenda dal Δp attraverso il diaframma, dalla densità del fluido ρ, dal diametro del tubo D e da quello dell'orifizio D_0, dimostrare che l'espressione della portata è $Q = CD_0\sqrt{2\Delta p/\rho}$. C è costante? Spiegare.

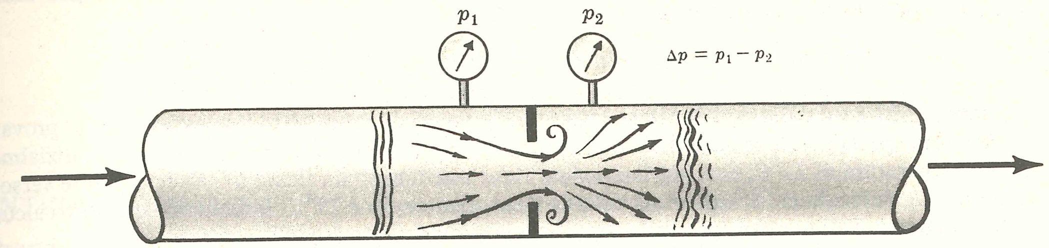


Fig. 4-5

4.17. Nei calcoli astronomici le distanze e i tempi risultano così grandi, in confronto con le nostre unità di misura abituali, che risulta talvolta conveniente usare un sistema di unità particolare.

In questo sistema, per semplicità di calcolo, si assumono uguali all'unità le seguenti costanti universali: velocità della luce, $c = 1$; massa del sole, $M = 1$; costante gravitazionale di Newton, $K = 1$. Definizione di K: due masse si attraggono reciprocamente secondo la legge gravitazionale $F = KM_1M_2/r^2$. F di solito è misurata in dine, le masse in grammi, r in centimetri.

Bisogna trovare in quali unità fondamentali vengono espresse M, L, T in questo sistema con le costanti universali pari all'unità, e collegarsi al consueto sistema di grammi, centimetri, secondi, ecc. Quanti centimetri costituiscono la nuova unità astronomica, quanti secondi il nuovo tempo astronomico? E cosa avviene della massa?

Dati: Massa del sole, 1,98 x 10^{33} g
Velocità della luce, 10^{10} cm/s
Costante gravitazionale (K), 6,67 x 10^{-8} g^{-1} cm^3 s^{-2}
Nota: La forza sarà espressa in dine anche nel nuovo sistema di unità di misura?

4.18. Studiare il modello di un'elica, nell'ipotesi che la spinta dipenda dal diametro D, dalla densità ρ e viscosità μ del fluido, dalla velocità V dell'elica nel fluido stesso e dalla velocità angolare ω della suddetta.

4.19. L'elica di una nave lunga 243 m ha un diametro di 3,05 m e ruota a 100 giri/min. Se un modellino della stessa nave, lungo 2,40 m, dev'essere provato in una vasca, indicare per quali condizioni dell'elica modello si otterrà una fedele rappresentazione dei fenomeni reali.

4.20. Un'imbarcazione lunga 30,5 m è progettata per muoversi in acqua dolce a 32 km/h. Trovare che viscosità cinematica sarà adatta per un liquido in cui fare delle prove di similitudine, con un modello lungo 1,50 m.

4.21. Applicare ad una turbina l'analisi fatta nel problema 4.10. I risultati sono gli stessi, tenendo presente che i termini ottenuti vanno interpretati in funzione della prestazione di una turbina, non di una pompa.

4.22. Una pompa, provata a 1000 giri/min, eroga 141 lt/s d'acqua con una prevalenza di 61 m; la potenza necessaria è di 203 CV. Calcolare il rendimento di detta pompa, e trovare per una geometricamente simile, con un diametro triplo e una velocità di 500 giri/min, e lo stesso rendimento, portata, prevalenza e potenza.

4.23. Un noto libro di cucina fornisce la seguente tabella per cuocere il tacchino al forno:

Peso del tacchino, kg	2,7-4,5	4,5-7,3	8,2-11,4
Tempo necessario al chilo, min/kg	44-55	39-44	33-39

Con l'analisi dimensionale si può ottenere questa informazione da una semplice osservazione sperimentale: sapendo cioè che un tacchino da 2,7-4,5 kg impiega da 44 a 55 min/kg per cuocere, è possibile estrapolare

dei valori per gli esemplari più pesanti.

Traccia. Considerare due tacchini geometricamente simili, entrambi alla temperatura iniziale T_0 e da cuocere ad una temperatura T_c in un forno a temperatura T_s. Possiamo definire una temperatura adimensionale $\theta = (T - T_0)/(T_s - T_0)$, e un tempo adimensionale $\tau = \alpha t/L^2$, in cui α è la diffusività termica dei tacchini, L la dimensione caratteristica, per esempio la lunghezza, t il tempo. Si può dimostrare (farlo) che vale la seguente formula:

$$(\text{tempo di cottura}) \times (\text{peso del tacchino})^{-2/3} = \text{costante}$$

4.24. Durante le prove sul passaggio di calore attraverso le pareti di congelatori domestici, è stato provato un contenitore specialmente isolato dalle dimensioni di 0,91 x 0,91 x 1,22 m. Il contenitore inizialmente è alla temperatura di 21°C; con una lampadina viene mantenuto un flusso di calore costante verso l'interno del suddetto, la cui temperatura esterna viene mantenuta a 21°C. Indichiamo qui sotto alcuni dati sull'aumento di temperatura della superficie interna rispetto a quella esterna.

(*a*) Diagrammare, in forma di parametri adimensionali, i dati sull'aumento della temperatura rispetto al tempo, in modo da poterli applicare ad altri problemi di natura simile. Un gruppo dovrà contenere la temperatura ma non il tempo, viceversa per l'altro.

(*b*) Trovare che differenza di temperatura dovremo aspettarci dopo 15 minuti nelle stesse condizioni viste prima, ma con metà spessore di parete.

Dati:

Tempo, ore	0	0,5	1,0	2,0	3,0	5,0	10
Differenza di temperatura, °C	0	8,8	12,5	16,6	19,7	23,3	26,8

Portata di calore per unità di area = 1,69 x 10^4 cal/h m²

Spessore di isolamento = 5,1 cm

Conduttività del coibente = 32 cal/m h °C

Capacità termica del coibente = 83 x 10^3 cal/m³ °C

NOMENCLATURA USATA NEL CAPITOLO 4

a = velocità del suono
B_r = numero di Brinkman = $\mu V_0^2/kT_0$
C_D = coefficiente di resistenza
C_L = coefficiente di portanza
c_p = calore specifico a pressione costante
c_v = calore specifico a volume costante
D = resistenza, diametro
E_c = numero di Eckert = B_r/P_r
f = coefficiente d'attrito =
F_r = numero di Froude = V_0^2/gL
G_r = numero di Grashof = $g\rho_0^2\beta(T_1 - T_0)L^3/\mu^2$
g = accelerazione di gravità
k = rapporto tra i calori specifici = c_p/c_v
L = lunghezza caratteristica, portanza
M = numero di Mach = V/a
N_R = numero di Reynolds = LV_0/ν
P_r = numero di Prandtl = ν/α = $\mu c_p/\kappa$
p = pressione

R = costante dei gas
$\mathbf{r}$ = vettore posizione
T = temperatura assoluta
t = tempo
$\mathbf{V}$ = vettore velocità
$(\,)_0$ = valore nella corrente indisturbata
$(\,)^*$ = variabile adimensionale
$(\,)^\dagger$ = variabile adimensionale
α = diffusività termica = $\kappa/\rho c_p$
β = coefficiente volumetrico di dilatazione termica
Θ = temperatura adimensionale
κ = conducibilità termica
μ = viscosità assoluta
ν = viscosità cinematica
Π = gruppo adimensionale
ρ = densità
Φ = funzione dissipazione
ψ = potenziale gravitazionale

CAPITOLO 5

Strato limite e correnti in tubazioni e condotte

5.1 INTRODUZIONE

Prandtl diede il via ad un notevole progresso della meccanica dei fluidi nel 1904, quando suggerì che la corrente fluida che si muove attorno a un oggetto si divide in due regioni: una sottile, prossima all'oggetto stesso, dove gli effetti dell'attrito sono notevoli; ed una esterna, dove invece l'attrito si può trascurare. Questo capitolo si dedica allo studio della prima, lo strato limite, mentre nel capitolo 6 vedremo le correnti del moto potenziale, nel quale l'attrito è trascurabile.

Studieremo adesso i caratteri fondamentali del moto in presenza di attrito, imparando i metodi per ottenere (1) la dimensione dello strato limite, (2) la risultante distribuzione di velocità, (3) la distribuzione di pressioni, (4) la forza esercitata da un fluido su di una superficie solida.

Conviene adesso distinguere tra "moti esterni" e "moti interni": i primi si hanno attorno a oggetti solidi, i secondi all'interno, come nel caso di tubi e canali. Le equazioni differenziali che descrivono questi moti sono essenzialmente le stesse, ma le condizioni al contorno sono diverse, così che alla fine i moti risultanti sono differenti.

Vediamo prima le correnti meno complesse, cioè le laminari: passeremo poi a quelle turbolente; anche se a queste ultime in questo capitolo si dedica un certo spazio, le vedremo molto meglio nel capitolo 9.

Prima di passare al dettaglio di equazioni e soluzioni per correnti di strato limite, facciamo alcune considerazioni dal punto di vista dell'ingegnere a proposito delle caratteristiche fisiche dello strato limite di fig. 5-1.

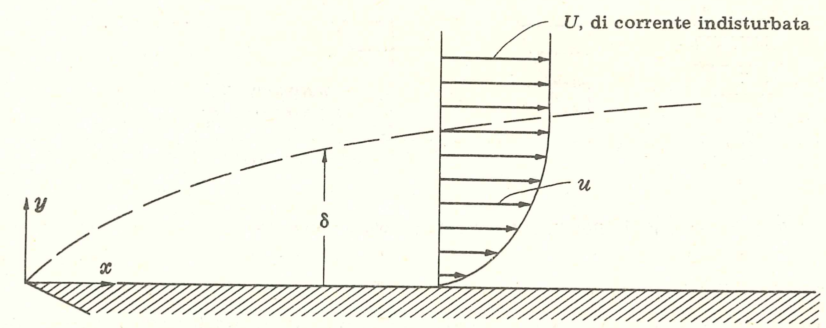


Fig. 5-1. Distribuzione delle velocità nello strato limite.

Non esiste linea di divisione tra regione a moto potenziale, dall'attrito trascurabile, e strato limite; è comunque usuale definire quest'ultimo come quella regione in cui la velocità del fluido (parallela alla superficie) è minore del 99% della velocità di corrente indisturbata, descritta dalla teoria del moto potenziale. Lo spessore δ dello strato limite va aumentando lungo la superficie su cui si muove il fluido, a partire dal bordo d'attacco della medesima; se questo appartiene ad una lastra piana, δ è zero, ma all'inizio di un profilo smussato, per esempio un cilindro, esiste uno spessore finito anche in corrispondenza a un punto di ristagno.

All'interno dello strato limite la corrente comincia come laminare, ma all'aumentare dello spessore incontriamo una regione di transizione e se la superficie interessata è abbastanza lunga il moto può diventare turbolento. La successione laminare-transizione-turbolento si incontra in tutti i moti su superfici abbastanza lunghe, senza badare se la corrente indisturbata è laminare o turbolenta; all'aumentare però del grado di turbolenza nella corrente indisturbata s'incontra prima la transizione da laminare a turbolento nello strato limite: in una zona cioè più vicina al bordo d'attacco.

Si può dimostrare che anche nei moti in cui la pressione varia lungo la superficie, il moto attorno ad una superficie curva per esempio, la variazione di pressione normale alla superficie stessa risulta trascurabile in tutto lo strato limite. Si accetta allora l'ipotesi che la distribuzione di pressione nello strato limite sia imposta dal gradiente di pressione della corrente indisturbata di moto potenziale subito al di fuori dello strato limite stesso. In molti problemi quest'ultimo è talmente sottile che lo si può trascurare completamente nel calcolo della soluzione del moto potenziale, soluzione che si può usare per determinare la distribuzione di pressione nei calcoli di strato limite. Con questa procedura si determina in aerodinamica la corrente su corpi affusolati, come i profili alari (vedi cap. 6).

La forma del profilo di velocità e la velocità di aumento dello spessore δ dello strato limite dipendono dal gradiente di pressione $\partial p/\partial x$. Se per esempio la pressione aumenta nella direzione del moto, lo spessore aumenta anch'esso rapidamente, e i profili di velocità appaiono come in fig. 5-2; se questo gradiente avverso di pressione è abbastanza grande si verificherà separazione, seguita da una regione a corrente invertita. Si definisce punto di separazione quello in cui $\partial u/\partial y|_{y=0} = 0$). Se la pressione diminuisce nella direzione del moto, lo spessore di strato limite aumenta lentamente; u è la velocità parallela alla parete nella direzione delle x; y è la coordinata normale alla parete stessa.

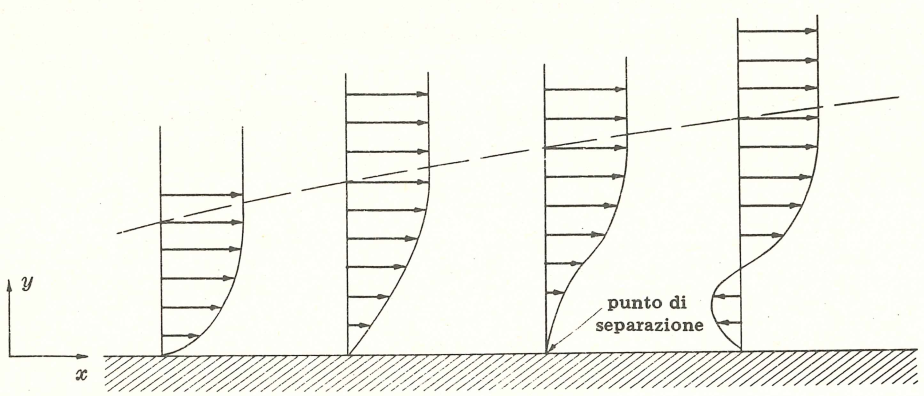
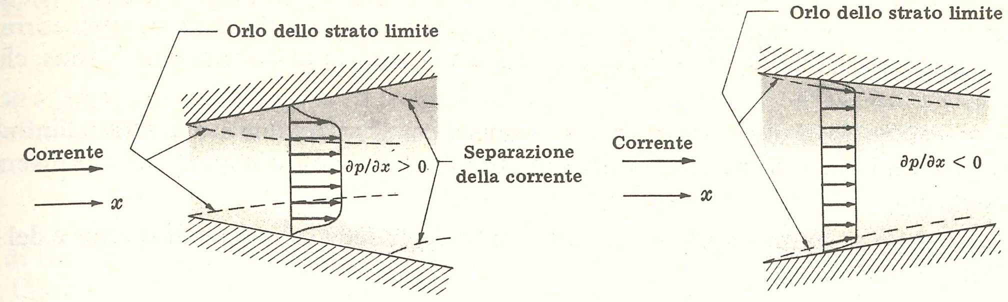


Fig. 5-2. Profili di velocità per corrente su lastra piana con $\partial p/\partial x > 0$.

L'effetto di un gradiente di pressione è molto importante per determinare il moto in diffusori, ugelli, e attorno agli oggetti. Il diffusore di fig. 5-3 ha un gradiente di pressione positivo: lo strato limite allora cresce rapidamente, e se l'angolo di divergenza del diffusore è troppo grande ci troveremo in presenza di una separazione. Avremo allora un diffusore dalle mediocri prestazioni: la pressione di recupero che otteniamo non arriva al valore di quella che avremmo senza la suddetta separazione. Si tratta di fare un compromesso tra lunghezza ed angolo di apertura: se quest'ultimo è troppo grande si ha separazione, se è troppo piccolo, per avere una data pressione bisogna usare una lunghezza eccessiva, il che porta a grandi perdite per attrito.

Nell'ugello invece il moto presenta una pressione decrescente nella direzione di avanzamento (gradiente di pressione favorevole); ne risulta che lo strato limite resta relativamente sottile, come si vede in fig. 5-3; la separazione non costituisce un problema negli ugelli, e i problemi di progetto sono in un certo qual modo più semplici.



(*a*) Diffusore subsonico (*b*) Ugello subsonico

Fig. 5-3. Confronto tra correnti di diffusore e di ugello.

La soluzione del moto potenziale per una corrente che lascia un oggetto (fig. 5-4) indica una pressione decrescente sulla parte anteriore del corpo e una crescente sulla parte posteriore. Ne risulta allora uno strato limite relativamente sottile sulla parte anteriore, e uno più spesso, con possibile separazione, su quella posteriore. In molte correnti si può trovare che lo strato limite è talmente sottile sull'intera estensione del corpo, che una soluzione che trascuri completamente la viscosità (per esempio una soluzione di moto potenziale) fornisce dei risultati accurati per la distribuzione di pressione. Tale è il caso per esempio del moto su profili affusolati. Comunque se il corpo è smussato nella parte posteriore e la scia diventa notevole a causa dell'ispessimento dello strato limite o della separazione, la soluzione di moto potenziale è corretta solo sulla parte anteriore del corpo, dove lo strato limite è sottile.

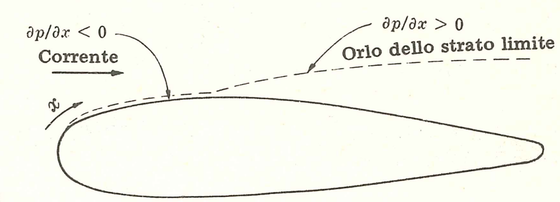


Fig. 5-4. Effetto in corrente esterna del gradiente di pressione sulla crescita dello strato limite.

5.2 CORRENTI ESTERNE

(*a*) Moto su di una lastra piana

In genere è un moto caratteristico delle correnti esterne: vedi fig. 5-1. Lo spessore dello strato limite è zero sul bordo d'attacco, e aumenta mano a mano sulla superficie piana. La prima zona dello strato limite è laminare, ma può essere seguita da una zona di transizione in cui la corrente passa da laminare a turbolenta; è una zona costituita da tanti piccoli scoppi di turbolenza, che si spandono e si mescolano fino a dar piena turbolenza, come si vede nella parte superiore di fig. 5-5. Gli scoppi di turbolenza non hanno una collocazione precisa, ma si muovono continuamente; vediamo allora che mentre la regione di moto completamente laminare può essere stabile e bidimensionale, sia la regione di transizione che quella completamente turbolenta sono instabili e tridimensionali.

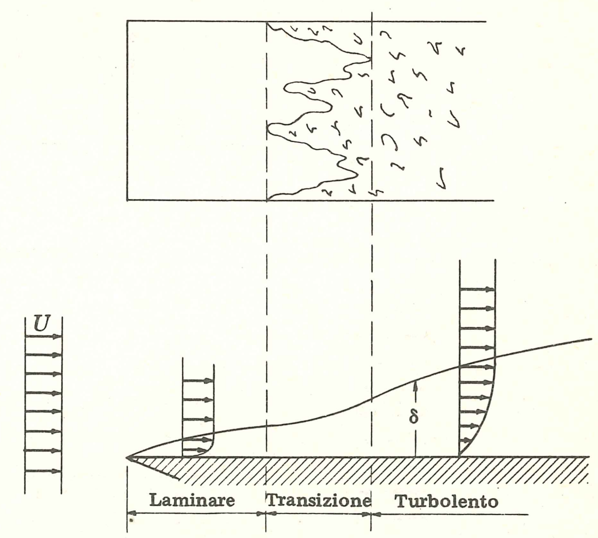


Fig. 5-5. Moto di strato limite su una lastra piana.

La soluzione esatta delle equazioni che descrivono lo strato limite laminare è difficile: solo pochi e semplici problemi possono essere trattati agevolmente. La soluzione per una corrente su lastra piana non può essere espressa in forma compatta: occorre la soluzione di Blasius, che si sviluppa in una serie infinita.

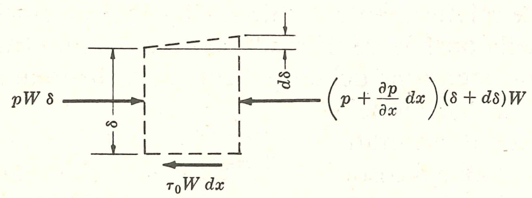
Sono stati sviluppati diversi metodi approssimati per studiare il moto di strato limite laminare; studieremo qui il metodo integrale della quantità di moto, molto importante per diversi calcoli sullo strato limite.

Si discutono e si confrontano poi i risultati principali della soluzione di Blasius e del metodo integrale per la lastra piana.

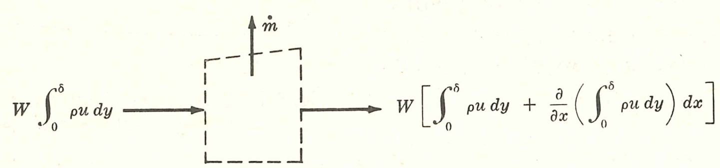
(*b*) Equazione integrale della quantità di moto, di von Karman

Consideriamo il volume di controllo per la corrente su una lastra piana come in fig. 5-6; scriviamo per esso l'equazione della quantità di moto in direzione x, vedi equazione (*3.9*). Abbiamo

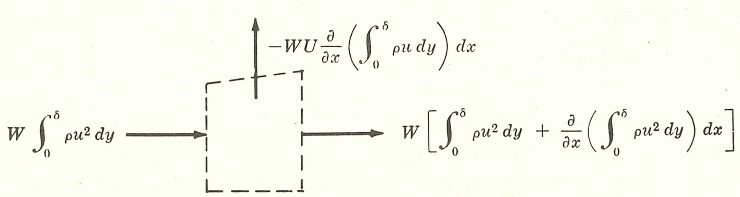
$$F_{s_x} = \int_{\text{C.S.}} \rho V_x \mathbf{V} \cdot d\mathbf{A}$$



(*a*) Forze agenti sul volume di controllo



(*b*) Portata in massa



(*c*) Portata in quantità di moto

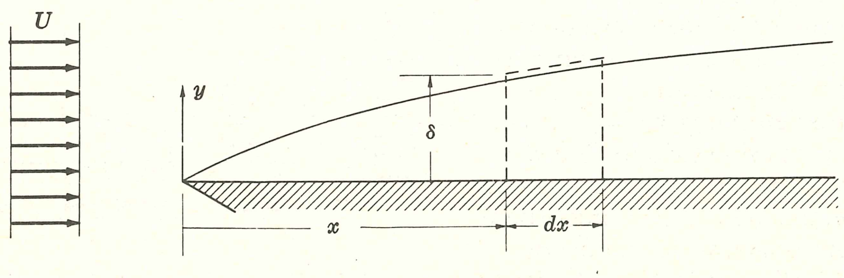


Fig. 5-6. Sviluppo delle equazioni integrali dello strato limite. W è larghezza della lastra, in direzione z.

Le forze di superficie sono

$$F_{s_x} = pW\delta - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}dx\right)(\delta + d\delta)W - \tau_0 W\,dx$$

in cui W è la larghezza della lastra, δ lo spessore dello strato limite, τ_0 lo sforzo di taglio sulla parete, definito dalla $\tau_0 = \mu\,\partial u/\partial y|_{y=0}$. Trascurando i termini del secondo ordine e semplificando,

$$F_{s_x} = \left[-\delta\frac{\partial p}{\partial x}dx - \tau_0\,dx\right]W$$

Prima di trovare i termini di portata, o flusso, di quantità di moto, consideriamo la portata in massa. Come si vede in fig. 5-6(*b*) avremo portata in massa attraverso tre facce; la portata $\dot{m}$ attraverso la faccia superiore è allora

$$\dot{m} = W\int_0^\delta \rho u\,dy - W\left[\int_0^\delta \rho u\,dy + \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^\delta \rho u\,dy\right)dx\right]$$
$$= -W\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^\delta \rho u\,dy\right)dx$$

in cui u è la componente secondo le x della velocità. La portata di quantità di moto secondo le x, $\dot{M}_x$, del fluido che attraversa detta faccia superiore è

$$\dot{M}_x = \dot{m}U = -WU\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^\delta \rho u\,dy\right)dx$$

con U velocità della corrente indisturbata (in direzione x), e la totale portata di quantità di moto è

$$\int_{\text{C.S.}} \rho V_x \mathbf{V}\cdot d\mathbf{A} = W\left[\int_0^\delta \rho u^2\,dy + \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^\delta \rho u^2\,dy\right)dx\right]$$
$$- WU\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^\delta \rho u\,dy\right)dx - W\int_0^\delta \rho u^2\,dy$$

Semplificando, $$\int_{\text{C.S.}} \rho V_x \mathbf{V}\cdot d\mathbf{A} = W\frac{\partial}{\partial x}\left[\int_0^\delta \rho u(u-U)\,dy\right]dx - W\frac{\partial U}{\partial x}\int_0^\delta \rho u\,dy$$

In modo che alla fine la completa equazione della quantità di moto diventa

$$\tau_0 + \delta\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho u(U-u)\,dy - \frac{\partial U}{\partial x}\int_0^\delta \rho u\,dy \qquad (5.1)$$

Se il gradiente di pressione esterno è zero (e quindi U è costante), l'equazione diventa

$$\tau_0 = \frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho u(U-u)\,dy \qquad (5.2)$$

Un approssimato spessore dello strato limite nel moto laminare incompressibile si può ottenere assumendo una ragionevole distribuzione di velocità e sostituendola nell'equazione (*5.2*). Scegliamo qui una distribuzione tipo polinomio di terzo grado:

$$u/U = \tfrac{3}{2}(y/\delta) - \tfrac{1}{2}(y/\delta)^3 \qquad (5.3)$$

Per avere i coefficienti basta soddisfare le condizioni al contorno: $u = 0$ in $y = 0$, $u = U$ per $y = \delta$, e $\partial u/\partial y = 0$ per $y = \delta$. Troviamo allora τ_0 come

$$\tau_0 = \mu\frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=0} = \frac{3}{2}\mu\left(\frac{U}{\delta}\right) \qquad (5.4)$$

in cui μ è la viscosità del fluido. Sostituendo la distribuzione di velocità dell'equazione (*5.3*) nella (*5.2*) e integrando, troviamo

$$\frac{3}{2}\mu\left(\frac{U}{\delta}\right) = \frac{39}{280}\rho U^2 \frac{d\delta}{dx}$$

Separando le variabili e integrando,

$$\delta/x = 4{,}64/\sqrt{Ux/\nu} = 4{,}64/\sqrt{N_{R_x}} \qquad (5.5)$$

in cui ν è la viscosità cinematica, e N_{R_x} il numero di Reynolds calcolato sulla lunghezza x. Possiamo ora combinare le equazioni (5.4) e (5.5) per avere

$$\tau_0 = 0{,}323\rho U^2/\sqrt{N_{R_x}} \qquad (5.6)$$

Il coefficiente d'attrito superficiale C_f è definito dalla $C_f = \tau_0/(\frac{1}{2}\rho U^2)$, così che possiamo trovarne il valore approssimato con la

$$C_f = 0{,}646\sqrt{\nu/Ux} = 0{,}646/\sqrt{N_{R_x}}$$

Questo valore di C_f è basato sull'approssimazione polinomiale di terzo grado, usata per il profilo di velocità. Troveremo nel prossimo paragrafo un valore più esatto di C_f, e faremo un confronto.

Si può usare la stessa procedura per determinare la velocità di accrescimento dello strato limite nel moto turbolento. In quest'ultimo tuttavia è necessario usare una distribuzione empirica di velocità, e uno sforzo di taglio alla parete. Per superfici lisce, Blasius ha trovato

$$\tau_0 = 0{,}0225\rho U^2(\nu/U\delta)^{1/4}$$

Per la distribuzione di velocità useremo la legge della potenza, discussa a pag. 82:

$$u/U = (y/\delta)^{1/7}$$

Sostituendo nell'equazione (5.2) lo sforzo di taglio e la distribuzione di velocità ora visti,

$$\delta/x = 0{,}376(Ux/\nu)^{-1/5} = 0{,}376(N_{R_x})^{-1/5}$$

in cui si assume che lo strato limite sia turbolento a partire dal bordo d'attacco. Lo sforzo di taglio risulta in funzione della distanza x:

$$\tau_0 = 0{,}0286\rho U^2(\nu/Ux)^{1/5} = 0{,}0286\rho U^2(N_{R_x})^{-1/5}$$

(c) Equazioni di Prandtl per lo strato limite. Soluzione di Blasius

Se consideriamo un moto laminare incompressibile a grande numero di Reynolds, su di una lastra piana, le equazioni di Navier-Stokes si riducono a

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (5.7)$$

in cui

$$\frac{\partial p}{\partial y} \ll \frac{\partial p}{\partial x} \qquad (5.8)$$

ed u, v sono rispettivamente le componenti della velocità secondo gli assi x ed y; il moto si assume incompressibile, a viscosità costante. Dette equazioni si possono ricavare con un'analisi sull'ordine di grandezza delle equazioni di Navier-Stokes complete. Per i dettagli si veda il rif. 9 di pag. 92.

L'equazione di continuità è

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad (5.9)$$

Il problema si riduce così a due equazioni e due incognite, u e v. Il gradiente di pressione $\partial p/\partial x$ si deduce dalla corrente esterna allo strato limite, mentre gli effetti della viscosità si possono trascurare. Questo problema viene ripreso nel prossimo capitolo.

Consideriamo una corrente su lastra piana, con gradiente di pressione zero. Le equazioni diventano

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

e le condizioni al contorno sono: $u = v = 0$ per $y = 0$; $u = U$ per $y = \infty$. Si assume che le curve di velocità nelle varie posizioni sull'asse abbiano profili simili (ed è proprio questo il caso), e si può quindi scrivere

$$u/U = g(y/\delta)$$

in cui g () è una notazione funzionale.

Sia ancora

$$\eta = y\sqrt{U/\nu x}, \quad u = \partial\psi/\partial y, \quad v = -\partial\psi/\partial x, \quad \psi = \sqrt{\nu x U}\,f(\eta)$$

in cui ψ è nota col nome di funzione di corrente, ed f è una funzione incognita da trovare. L'equazione della quantità di moto diventa allora, in funzione della funzione di corrente ψ,

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial y\,\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = \nu\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3}$$

E in funzione di f troviamo l'equazione differenziale ordinaria

$$f\frac{d^2f}{d\eta^2} + 2\frac{d^3f}{d\eta^3} = 0$$

e le condizioni al contorno: $f = f' = 0$ per $\eta = 0$; $f' = 1$ per $\eta = \infty$. Questa equazione è stata risolta da Blasius (vedi rif. 2, pag. 92) con uno sviluppo in serie; il risultato si vede in fig. 5-7.

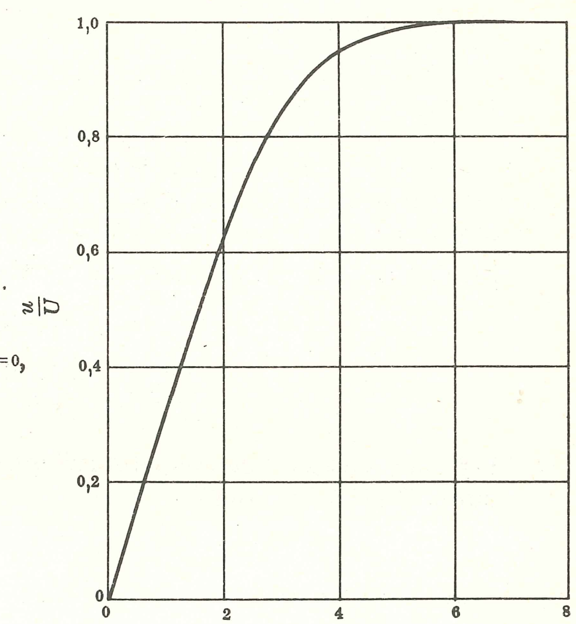
Essendo il coefficiente d'attrito superficiale definito dalla $C_f = \tau_0/(\frac{1}{2}\rho U^2)$, in cui $\tau_0 = \mu\,\partial u/\partial y|_{y=0}$, troviamo C_f con la

$$C_f = 2\sqrt{\nu/Ux}\left.\frac{d^2f}{d\eta^2}\right|_{\eta=0}$$

E dalla soluzione di Blasius, $d^2f/d\eta^2|_{\eta=0} = 0{,}332$ e quindi

$$C_f = 0{,}664\sqrt{\nu/Ux} = 0{,}664/\sqrt{N_{R_x}}$$

Confrontando questo valore di C_f con quello che abbiamo già ottenuto con il metodo integrale, vediamo che l'approssimazione con polinomio di terzo grado reca un errore di stima di C_f del solo 2,7% circa: e questo ci fa capire il valore dei metodi approssimati.



$\eta = y\sqrt{U/\nu x}$

Fig. 5-7. Distribuzione di velocità per un moto laminare su una lastra piana, con gradiente di pressione zero (rif. 2, pag. 92).

(d) Strati limite turbolenti

Non esiste una soluzione completamente analitica per la distribuzione della velocità media nei moti turbolenti, anche per situazioni semplici come la corrente che lambisce una lastra piana, o il moto a regime nelle tubazioni. Vedremo qui alcuni metodi semiempirici che descrivono le distribuzioni di velocità media e di pressione nei moti turbolenti. Tutti i risultati comunque valgono solo per moti bidimensionali.

(i) *Leggi della potenza*

Le leggi della potenza sono derivate dalla formula di Blasius per la resistenza in tubi diritti e lisci; vanno bene anche per altri moti in condotta, e per gli strati limite bidimensionali. Assumeremo che le pareti siano lisce, e il gradiente di pressione trascurabile.

Nell'ipotesi che il coefficiente d'attrito superficiale C_f si possa esprimere in funzione di una potenza del numero di Reynolds, basata su δ, abbiamo

$$C_f = \frac{\text{costante}}{(U\delta/\nu)^m} \qquad (5.10)$$

in cui U è la velocità sull'asse se si tratta di una tubazione, la velocità di corrente indisturbata per il moto di strato limite. δ è il raggio del tubo, o lo spessore di strato limite. Allora per la definizione di C_f, e per l'equazione (*5.10*),

$$U/u_\tau = (\text{costante}) \quad (u_\tau \delta/\nu)^{m/(2-m)} \qquad (5.11)$$

nella quale abbiamo introdotto la velocità di attrito u_τ, definita come $\sqrt{\tau_0/\rho}$. Assumiamo che la velocità u, ad una distanza qualsiasi dalla parete, y, si possa esprimere con una equazione simile alla (*5.11*):

$$u/u_\tau = (\text{costante})\,(u_\tau y/\nu)^{m/(2-m)} \qquad (5.12)$$

Se assumiamo inoltre che i profili delle velocità medie siano simili, e combiniamo le (*5.11*) e (*5.12*), ricaviamo

$$u/U = (y/\delta)^{m/(2-m)} \qquad (5.13)$$

Troviamo che, assumendo $m = \frac{1}{4}$, la (*5.13*) esprime la variazione dei coefficienti d'attrito nei tubi per $3000 < U\delta/\nu < 70\,000$. Questo è allora il vantaggio di introdurre una distribuzione secondo la legge della potenza. In teoria non ci aspettiamo alcuna variazione dell'esponente m; esso varia solo debolmente col numero di Reynolds; abbiamo quindi un'espressione molto utile nei calcoli d'ingegneria.

Per il moto nelle tubazioni le equazioni diventano

$$\left.\begin{aligned} C_f &= 0{,}0466(U\delta/\nu)^{-1/4} \\ u/u_\tau &= 8{,}74(u_\tau y/\nu)^{1/7} \\ u/U &= (y/\delta)^{1/7} \end{aligned}\right\} \begin{array}{l}\text{Moto nelle tubazioni} \\ 3000 < N_R < 70\,000\end{array}$$

Per valori crescenti del numero di Reynolds, l'esponente m dell'equazione precedente diminuisce (vedi rif. 9, pag. 92).

(ii) *Legge della parete*

Se assumiamo che esista una regione prossima alla parete in cui la viscosità è sensibile, e che il vincolo principale al moto sia l'azione di taglio alla parete – e può quindi essere trascurato il gradiente di pressione – potremo scrivere la seguente relazione funzionale per la distribuzione di velocità:

$$u = F(\tau_0, y, \mu, \rho)$$

Con l'analisi dimensionale abbiamo

$$u/u_\tau = f(yu_\tau/\nu) \qquad (5.14)$$

L'equazione (*5.14*) esprime la "legge della parete", e dice che se si tracciano i diagrammi di yu_τ/ν in funzione di u/u_τ per tanti moti diversi, si ricava un'unica curva. Questo è stato verificato sperimentalmente; è vero specialmente per superfici lisce e moderati gradienti di pressione, anche a grandi distanze dalla parete (ma non per la parte più esterna dello strato limite). L'effetto di grandi e avversi gradienti di pressione fa sì che le deviazioni dalla legge

della parete si verifichino in zone più prossime alla parete stessa. Vediamo in fig. 5-8 alcuni risultati sperimentali.

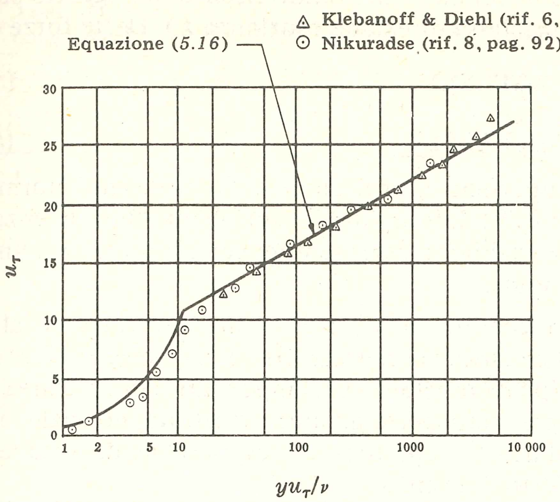


Fig. 5-8. Distribuzione di velocità con la legge della parete. u_τ è la velocità d'attrito, $\sqrt{\tau_0/\rho}$.

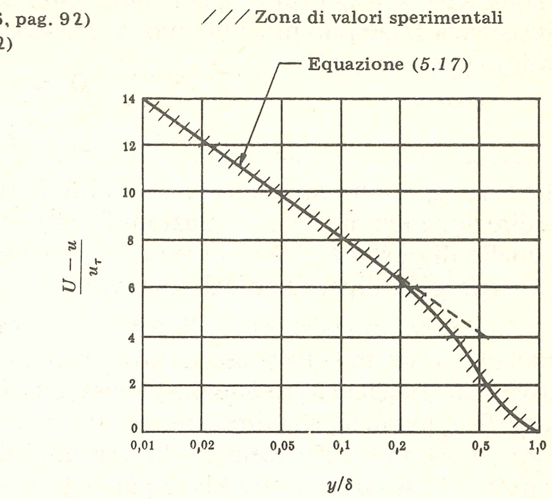


Fig. 5-9. Distribuzione di velocità con la legge del salto di velocità.

(iii) *Legge del salto di velocità*

Assumiamo ora che la viscosità non abbia più importanza nella parte esterna dello strato limite, e che il salto di velocità (*U-u*) dipenda dallo sforzo di taglio alla parete e dalla distanza δ fino alla quale l'effetto è arrivato dalla parete. Allora

$$U - u = G(\tau_0, y, \delta, \rho)$$

e con l'analisi dimensionale vediamo

$$(U-u)/u_\tau = g(y/\delta) \qquad (5.15)$$

La legge del salto di velocità è soddisfatta sperimentalmente nei moti con gradiente di pressione zero, per la parte esterna dello strato limite; essa è indipendente dalla rugosità della parete. Vediamo i risultati in fig. 5-9.

(iv) *Forme logaritmiche della legge della parete e della legge del salto di velocità.*

Si è osservato che esiste una regione di sovrapposizione, in cui sia la legge della parete che quella del salto di velocità sussistono contemporaneamente. Si può dimostrare che in detta regione le funzioni f e g appena viste debbono essere logaritmiche. E' come dire che l'equazione (*5.14*) diventa

$$u/u_\tau = C_1 \ln (yu_\tau/\nu) + C_2 \qquad (5.16)$$

e la (*5.15*)

$$(U-u)/u_\tau = C_3 \ln (y/\delta) + C_4 \qquad (5.17)$$

Le costanti C_1, C_2, C_3, C_4 sono state determinate sperimentalmente; i testi le riportano con lievi variazioni. Il Clauser (rif. 3, pag. 92) ci dà

$$C_1 = 2{,}44, \quad C_2 = 4{,}9, \quad C_3 = -2{,}44, \quad C_4 = 2{,}5$$

Vediamo in fig. 5-8 e 5-9 un confronto con i risultati sperimentali.

(*e*) Resistenza e portanza

Ogni volta che un oggetto viene posto in un fluido in moto, o si muove attraverso un fluido in quiete, nasce una forza agente nella direzione del moto del fluido rispetto all'oggetto stesso (resistenza D), e può nascerne una normale alla stessa direzione (portanza L). Dette forze si possono esprimere così:

$$D = C_D(\rho V^2/2)A \qquad (5.18)$$

$$L = C_L(\rho V^2/2)A \qquad (5.19)$$

A è una superficie caratteristica, di solito la superficie, o proiezione della medesima, normale alla direzione del moto. Le equazioni (*5.18*) e (*5.19*) definiscono il coefficiente di resistenza C_D e quello di portanza C_L; tranne pochi casi, essi debbono esser sempre cercati sperimentalmente. Generalmente dipendono dal numero di Reynolds.

Le forze di resistenza e di portanza sono causate dalla somma delle forze tangenziali e normali che operano sulla superficie del corpo. La resistenza dovuta alle azioni tangenziali si chiama attrito superficiale, o resistenza viscosa; è il tipo di resistenza più importante, in cui l'area della superficie parallela alla direzione del moto è grande rispetto all'area proiettata, normale alla direzione del moto. Per esempio, la resistenza d'attrito superficiale è responsabile di tutta la resistenza nel caso della lastra piana parallela al letto del vento.

La resistenza dovuta a sforzi normali si chiama resistenza di forma, o di pressione, più importante e spesso predominante per i profili tondeggianti. Nel capitolo 6 si vede che se il fluido che lambisce gli oggetti fosse senza attrito, e non vi fosse quindi strato limite, la resistenza sarebbe nulla. Il fluido però non è senza attrito, e lo strato limite esiste, e cresce più rapidamente con un gradiente di pressione avverso, e se quest'ultimo è abbastanza grande si può verificare la separazione. Il grande strato limite, o onda, sulla parte posteriore del corpo risulta in una pressione minore di quella che si otterrebbe nel moto senza attrito. Questa pressione ridotta risulta in una forza in direzione del moto: vedi fig. 5-10.

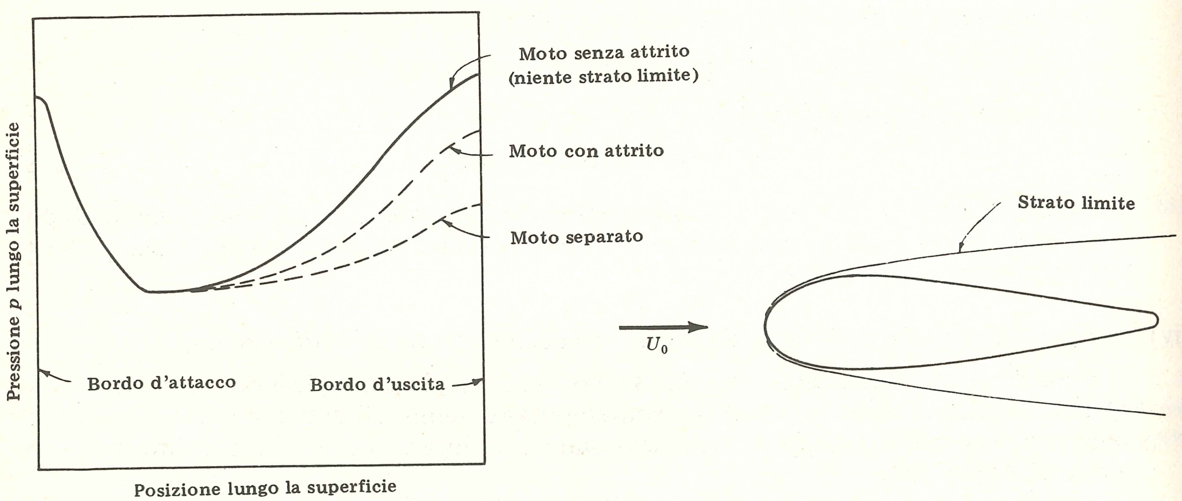
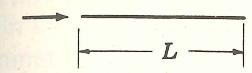
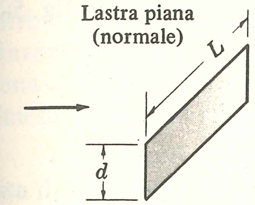
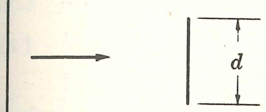
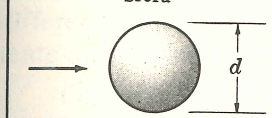
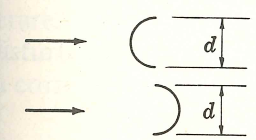
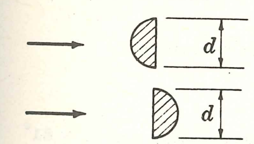
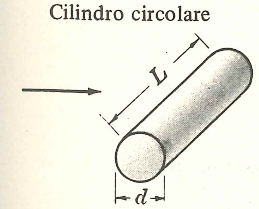
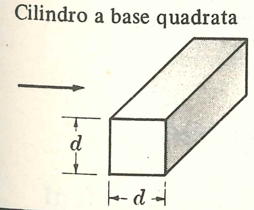


Fig. 5-10. Effetto dello strato limite sulla distribuzione di pressioni, lungo la superficie di un oggetto in moto.

Vediamo qui che per ridurre la resistenza di pressione è necessario ridurre il gradiente di pressione avverso sulla parte posteriore del corpo, e, se possibile, prevenire la separazione. Vuol dire che sulla parte posteriore ora vista dovremmo avere una curvatura progressiva; però, se il corpo è troppo lungo, perdiamo il guadagno ottenuto riducendo la resistenza di pressione, per l'aumento della resistenza d'attrito superficiale. Progettare un corpo in vista della minima resistenza vuol dunque dire cercare un compromesso tra resistenza d'attrito superficiale e resistenza di pressione.

Tabella 5.1. Coefficienti d'attrito

Oggetto	C_D	Intervalli di numero di Reynolds	Lunghezza caratteristica	Area caratteristica
Lastra piana (tangenziale) 	$1{,}33(N_R)^{-1/2}$	laminare	L	Area della superficie della lastra
	$0{,}074(N_R)^{-1/5}$	$N_R < 10^7$		
Lastra piana (normale) 	L/d: 1 – 1,18; 5 – 1,2; 10 – 1,3; 20 – 1,5; 30 – 1,6; ∞ – 1,95	$N_R > 10^3$	d	Area della superficie della lastra
Disco circolare 	1,17	$N_R > 10^3$	d	
Sfera 	$24(N_R)^{1/2}$	$N_R < 1$	d	Area proiettata
	0,47	$10^3 < N_R < 3 \times 10^5$		
	0,2	$N_R > 3 \times 10^5$		
Emisfero cavo 	0,34	$10^4 < N_R < 10^6$	d	Area proiettata
	1,42	$10^4 < N_R < 10^6$		
Emisfero solido 	0,42	$10^4 < N_R < 10^6$	d	Area proiettata
	1,17	$10^4 < N_R < 10^6$		
Cilindro circolare 	L/d: 1 – 0,63; 5 – 0,8; 10 – 0,83; 20 – 0,93; 30 – 1,0; ∞ – 1,2	$10^3 < N_R < 10^5$	d	Area proiettata
Cilindro a base quadrata 	2,0	$3{,}5(10)^4$	d	Area proiettata

I coefficienti di resistenza per corpi di forma assegnata dipendono principalmente dal numero di Reynolds. Quanto all'intensità della turbolenza della corrente indisturbata e alla scabrosità superficiale, anche se di solito esse hanno effetti secondari sulla resistenza, in certe condizioni possono essere molto importanti. In tabella 5.1 possiamo trovare i coefficienti di resistenza per diversi profili; per un elenco più completo il testo migliore è l'Hoerner (rif. 5, pag. 92).

Il principio della portanza viene spiegato dall'analisi del moto adimensionale di cap. 6.

Per dimostrare alcuni concetti già esposti sull'origine della resistenza, consideriamo il moto attorno ad un cilindro circolare, per il quale il coefficiente di resistenza è diagrammato in fig. 5-11. La forma della corrente si vede in fig. 5-12.

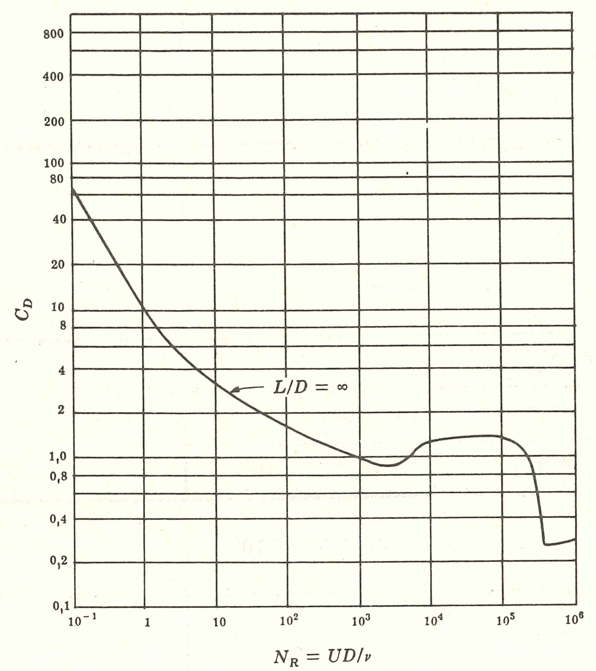


Fig. 5-11. Coefficienti di resistenza per cilindri circolari.

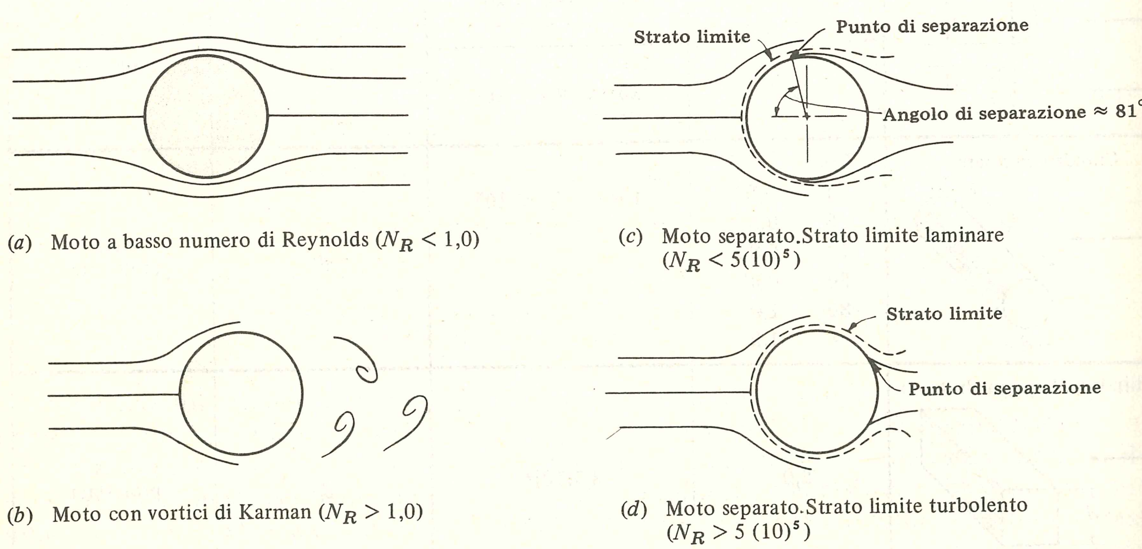


Fig. 5-12. Moto attorno ad un cilindro circolare.

Il tipo di corrente viene regolato dal numero di Reynolds. Per un numero di Reynolds molto basso ad esempio ($N_R < 1$) la corrente non si separa, ovvero non c'è distacco, e l'attrito superficiale predomina. Ai bassi numeri di Reynolds la resistenza è proporzionale alla velocità, e il coefficiente di resistenza diminuisce all'aumentare di N_R. Ma all'aumentare di quest'ultimo vi sarà tendenza al distacco, il quale si verificherà periodicamente, con la formazione di vortici di Karman. Un ulteriore aumento di N_R ci darà una corrente completamente distaccata. Lo strato limite laminare nella parte anteriore del cilindro è sottile, a causa del gradiente di pressione favorevole. Ne risulta che, con l'analisi del moto senza attrito (cap. 6), si può determinare accuratamente la distribuzione di pressione. Sulla parte posteriore del cilindro esiste però un gradiente di pressione sfavorevole, e ne consegue una rapida crescita dello spessore di strato limite, e il distacco della vena. La resistenza di pressione è molto maggiore dell'attrito superficiale, e in questo caso il coefficiente d'attrito risulta relativamente costante.

Lo strato limite diventa turbolento ad un certo numero di Reynolds: ne risulta un'improvvisa diminuzione del coefficiente d'attrito perché il punto di distacco viene spostato, e ne consegue una minore resistenza di pressione, e quindi una minore resistenza totale.

5.3 MOTO INTERNO

(*a*) Moti d'ingresso

I moti interni differiscono da quelli esterni perché nella regione d'ingresso di un moto interno esiste uno strato limite, e si ha una corrente indisturbata uniforme che accelera a seconda della velocità di accrescimento dello strato limite stesso. Si ha poi una seconda e più importante differenza quando il moto passa a regime: la velocità varia nell'intero condotto, e non c'è corrente indisturbata, o un ben definito strato limite.

Consideriamo un moto laminare nella regione d'ingresso del tubo di fig. 5-13: ivi la velocità è uniforme. Lo strato limite cresce man mano che ci allontaniamo dall'ingresso, fino al punto in cui il moto va a regime. Dall'equazione di continuità si vede che il nucleo senza attrito deve accelerare, e quindi, con la relazione di Bernoulli applicata su una linea di corrente della regione indisturbata, la pressione deve diminuire. La lunghezza X_L di sviluppo laminare necessaria perché la corrente vada a regime è stata data da Boussinesq:

$$X_L = 0{,}03 N_R D$$

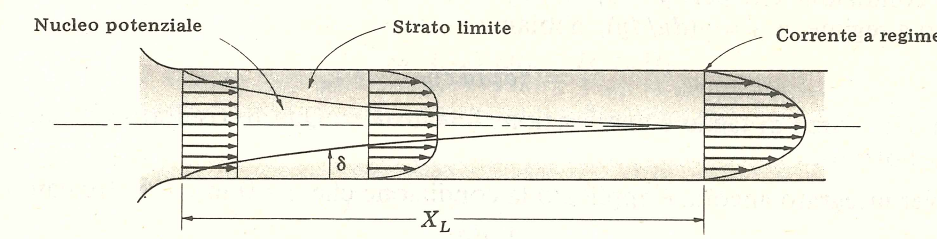


Fig. 5-13. Corrente all'ingresso di una tubazione: moto laminare.

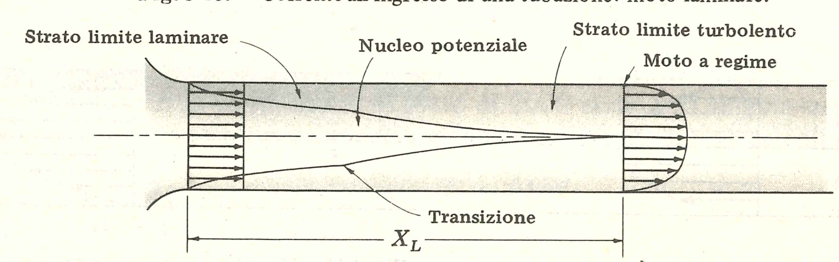


Fig. 5-14. Corrente all'ingresso di una tubazione: moto turbolento.

In fig. 5-14 vediamo il moto nella regione di entrata, quando il numero di Reynolds è abbastanza grande perché il moto stesso risulti turbolento ($N_R > 2300$). Esistono diversi criteri

per stabilire quando il moto è perfettamente a regime. Per esempio, ci si può basare sulla caduta di pressione, sulla distribuzione della velocità media, sulle grandezze interessate dalla turbolenza. Nei singoli casi le lunghezze di riferimento cambiano: il gradiente di pressione assume in genere il suo valore di regime a tre o quattro diametri dopo l'ingresso. Prima di arrivare a regime, la velocità media ha bisogno da 30 a 60 diametri di lunghezza da percorrere. Quanto alle grandezze della turbolenza, esse hanno bisogno di distanze ben maggiori. Il criterio più preciso per dire che una corrente è a regime è che la velocità di variazione di tutte le grandezze mediate (tranne la pressione) sia zero, rispetto la coordinata presa nella direzione del moto. Il criterio comunque più usato nella letteratura è di prendere il punto in cui i profili di velocità media non cambiano con la distanza, in direzione del moto.

(*b*) **Moti a regime**

(i) *Transizione*

Il moto in una tubazione può mantenersi laminare, così come può assumere un caotico moto fluttuante (turbolento), sovrapposto alla corrente normale. Tutto dipende dalla rugosità della parete e dal numero di Reynolds, come si vede dal classico esperimento di quest'ultimo. Nella corrente d'acqua, che scorre in un tubo di vetro, si introduce un piccolo getto colorato: per le basse velocità si tratta di un filamento omogeneo, ma all'aumentare della portata si giunge a un punto in cui il filetto si disperde in una traiettoria vorticosa, indice del moto turbolento. Il numero di Reynolds in cui si ha transizione da moto laminare a turbolento è circa 2300, ma in certe condizioni si sono registrati valori fino a 40000.

(ii) *Moto laminare*

Consideriamo il moto laminare a regime, tra pareti parallele, di fig. 5-15; la velocità sarà massima al centro, e zero alle pareti. La distribuzione di velocità sarà inoltre simmetrica rispetto alle y.

In questo caso l'equazione del moto proiettata sulle x diventa

$$0 = -dp/dx + \mu(d^2u/dy^2)$$

E integrando una volta otteniamo $\mu(du/dy) = (dp/dx)y + C_1$

e con la condizione che per $y = 0$, $du/dy = 0$, abbiamo $C_1 = 0$. Essendo dp/dx = costante nel moto a regime, e $\tau = \mu(du/dy)$, abbiamo

$$\tau = (dp/dx)y$$

E dunque lo sforzo di taglio è una funzione lineare di y. Questo risultato vale anche per il moto turbolento.

Dopo aver integrato ancora, e applicato la condizione che $u = 0$ in $y = h$, troviamo

$$u = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}(y^2 - h^2) \qquad (5.20)$$

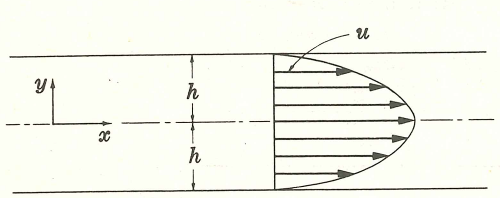


Fig. 5-15. Moto laminare a regime tra pareti parallele.

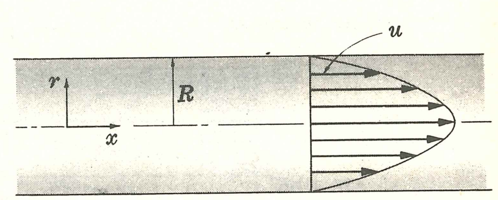


Fig. 5-16. Moto laminare a regime in una tubazione.

Consideriamo adesso un moto laminare a regime in un tubo circolare, come in fig. 5-16: si tratta di un moto di Poiseuille. Applicando di nuovo l'equazione del moto e le condizioni

al contorno, e integrando direttamente:

$$u = \frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dx}(r^2 - R^2) \qquad (5.21)$$

(iii) *Coefficiente d'attrito e perdita di carico*

Le perdite di carico nei moti interni sono una conseguenza dell'attrito; esse hanno notevole importanza per l'ingegnere e possono verificarsi in tubazioni e condotte (perdite maggiori) o in brusche variazioni di sezione, valvole, gomiti, ecc. (perdite minori).

L'equazione dell'energia per un volume di controllo, compreso tra due punti in una conduttura, è

$$V_1^2/2 + p_1/\rho + gz_1 = V_2^2/2 + p_2/\rho + gz_2 + u_2 - u_1 - q$$

ovvero $$V_1^2/2g + p_1/\rho g + z_1 = V_2^2/2g + p_2/\rho g + z_2 + H_L \qquad (5.22)$$

in cui $H_L = (u_2 - u_1 - q)/g$ è la perdita di carico, ed u l'energia interna specifica. Il termine H_L rappresenta effettivamente la diminuzione (perdita) in energia meccanica tra i punti 1 e 2, e contiene in genere sia le perdite maggiori che le minori.

Vediamo ora i metodi per calcolare queste perdite; nel moto turbolento, non si possono calcolare in via puramente analitica. I risultati sono dunque di natura estremamente empirica.

Cerchiamo di calcolare le perdite maggiori, limitando l'analisi ad un moto turbolento incompressibile a regime, in un tubo a diametro costante.

Vediamo nell'equazione (*5.22*) che da variazioni di velocità e di quota e da perdite per attrito risultano delle variazioni di pressione. Per il caso di moto incompressibile a sezione costante che consideriamo qui, si ha $V_1 = V_2$; assumiamo $z_1 = z_2$. L'equazione (*5.22*) diventa perciò $H_L = (p_1 - p_2)/\rho g$.

La variazione di pressione dipende poi da (1) diametro del tubo D, (2) velocità media V, (3) lunghezza L, (4) viscosità μ, (5) densità ρ, (6) rugosità della parete ϵ. Perciò

$$\Delta p = F(D, V, L, \mu, \rho, \epsilon)$$

E dall'analisi dimensionale ricaviamo quattro parametri adimensionali:

$$\frac{\Delta p}{\rho V^2} = G(\rho VD/\mu, \epsilon/D, L/D)$$

Dalle prove si sa che due dei parametri possono essere raccolti:

$$\frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho V^2}\left(\frac{D}{L}\right) = f(\rho VD/\mu, \epsilon/D)$$

ovvero $$\frac{\Delta p}{\rho g} = H_L = \left(\frac{L}{D}\right)\frac{V^2}{2g}f \qquad (5.23)$$

in cui f = coefficiente d'attrito, già determinato sperimentalmente; i risultati sono in fig. 5-17. Per numeri di Reynolds al di sotto di 2000 esiste una singola curva, perché il moto è laminare. In quest'ultimo caso il coefficiente d'attrito si può calcolare analiticamente con la

$$f = 64/N_R \qquad (5.24)$$

come si vede nel problema 5.6.

Consideriamo ora le perdite minori in gomiti, valvole, variazioni di sezione: per queste dobbiamo ricorrere alle prove. Si usa porle nella forma

$$H_L = KV^2/2g \qquad (5.25)$$

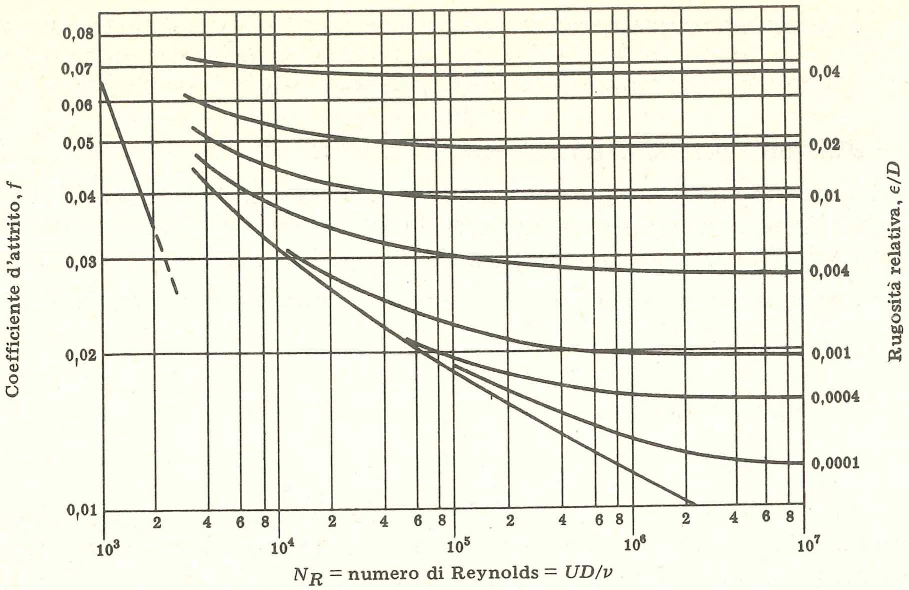


Fig. 5-17. Coefficienti d'attrito per il moto in tubazioni.

in cui K è un coefficiente di perdite per attrito, per diversi tipi di perdite minori, e si trova nei manuali per i raccordi commerciali. Ne troviamo dei valori approssimati in tabella 5.2.

Tabella 5.2. Coefficienti K di perdite di carico minori

Valvole, raccordi, tubazioni	K
Valvola sferica (aperta)	10,0
Valvola a saracinesca (aperta)	0,19
Gomito a 90°	0,90
Gomito a 45°	0,42
Bocca, ad orli taglienti, di tubo circolare	0,50
Bocca, ad orli smussati, di tubo circolare	0,25
Aumento brusco di sezione	$(1 - A_1/A_2)^2$*

*A_1 = sezione a monte, A_2 = sezione a valle.

(iv) *Distribuzioni di velocità nel moto turbolento*

In fig. 5-18 vediamo delle distribuzioni di velocità caratteristiche per il moto a regime in tubazione. Come abbiamo già fatto nel caso della lastra piana, approssimiamo la velocità con quella ottenuta con la legge della potenza. Troviamo così

$$u/u_{max} = (y/R)^{1/n} \qquad (5.26)$$

in cui y è la distanza dalla parete del tubo, misurata verso il centro.

L'esponente $1/n$ varia debolmente con il numero di Reynolds, e va da 1/6 a 1/10 per N_R che vanno da 4×10^3 a 3×10^6.

Con l'eccezione della zona lontana dall'asse di simmetria, la distribuzione di velocità si può approssimare con la forma logaritmica della legge della parete. Abbiamo qui

$$u/u_\tau = 2{,}44 \ln (yu_\tau/\nu) + 4{,}9 \qquad (5.27)$$

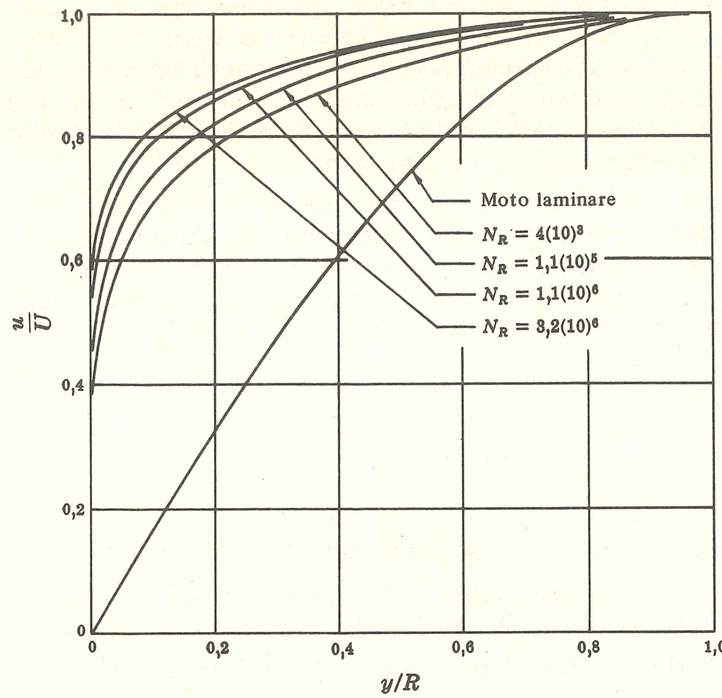


Fig. 5-18. Distribuzione di velocità per il moto a regime in tubi lisci (rif. 8, pag. 92).

5.4 SOMMARIO

In questo capitolo abbiamo studiato correnti con attrito, e ci è stato comodo distinguere tra moti esterni e moti interni, cioè tra correnti che lambiscono oggetti, e correnti in tubi e condotte.

Nel primo caso abbiamo ricavato espressioni dell'accrescimento dello strato limite su una lastra piana (vedi equazione (*5.5*)), e dello sforzo di taglio alla parete (vedi equazione (*5.6*)): espressioni ottenute dall'equazione integrale della quantità di moto in un volume di controllo, dopo aver assunto una certa distribuzione di velocità.

Abbiamo presentato la distribuzione di velocità di Blasius, per il moto laminare su una lastra piana con gradiente di pressione zero. Abbiamo anche discusso i metodi che descrivono una distribuzione turbolenta di velocità:

$$u/U = (y/\delta)^{m/(2-m)} \quad \text{(Legge della potenza)} \qquad (5.13)$$

$$u/u_\tau = 2{,}44 \ln (yu_\tau/\nu) + 4{,}9 \quad \text{(Forma logaritmica della legge della parete)} \qquad (5.16)$$

$$(U-u)/u_\tau = -2{,}44 \ln (y/\delta) + 2{,}5 \quad \text{(Forma logaritmica della legge del salto di velocità)} \qquad (5.17)$$

Abbiamo presentato resistenza e portanza; della prima abbiamo due tipi: una è la resistenza d'attrito superficiale che dipende dagli sforzi tangenziali, l'altra la resistenza di forma, o di profilo, dipendente dalla distribuzione di pressione.

La resistenza di pressione è fortemente influenzata dal fenomeno del distacco, che può aver luogo in un certo punto della parte posteriore del corpo. La posizione del punto di distacco dipende in buona parte dalla velocità di accrescimento dello strato limite, regolata a sua volta dal gradiente di pressione esterno. La turbolenza tende a ritardare il distacco, e a ridurre la resistenza di pressione.

I moti interni sono stati distinti in moti d'ingresso, o di transizione, e moti a regime. Sono state ricavate le distribuzioni di velocità per un moto laminare a regime tra pareti parallele e in un tubo circolare. In quest'ultimo la transizione da moto laminare a turbolento si ha per un N_R nominale di 2300, anche se in condizioni particolari sono stati misurati dei valori ben più alti. Si è trovato che lo sforzo di taglio, sia per il moto laminare a regime che per quello turbolento, è una funzione lineare della distanza dall'asse di simmetria.

Le variazioni di pressione nel moto interno sono state presentate, in modo estremamente empirico, come "prevalenza" o "perdite per attrito"; nel caso di tubazioni a diametro costante, i risultati vengono dati in funzione del coefficiente d'attrito, che dipende dal numero di Reynolds e dalla rugosità della parete. Gli altri tipi di perdite, per gomiti, valvole, ecc., sono stati dati in funzione di un coefficiente empirico di perdita di carico.

BIBLIOGRAFIA

1. Bird R. B., Stewart W. E., Lightfoot E. N., *Transport Phenomena*, John Wiley, 1960.
2. Blasius H., "Grenzchichten in Flussigkeiten mit kleiner Reibung", *Z. Math. u. Phys.*, **56**, 1, 1908, English translation NACA TM, No. 1256.
3. Clauser F. H., "The Turbulent Boundary Layer", *Advances in Applied Mechanics*, **4**, pp. 1-51, Academic Press, 1956.
4. Goldstein S., *Modern Developments in Fluid Dynamics*, voll. I e II, Oxford University Press, 1938; anche Dover Publications.
5. Hoerner S. F., *Fluid Dynamic Drag*, pubblicato dall'autore, Midland Park, New Jersey, 1958.
6. Klebanoff P. S., Diehl F. W., "Some Features of Artificially Thickened Fully Developed Turbulent Boundary Layers with Zero Pressure Gradient", *NACA Report 1110*, 1952.
7. Li W. H., Lam, S. H., *Principles of Fluid Mechanics*, Addison-Wesley, 1964.
8. Nikuradse J., "Gesetzmässigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Rohren", *Forschungs – Arb. Ing.-Wesen*, **356**, 1932.
9. Schlichting H., *Boundary Layer Theory*, McGraw-Hill, 1955.
10. Shames I. H., *Mechanics of Fluids*, McGraw-Hill, 1962.
11. Shapiro A. H., *Shape and Flow*, Anchor Books, Doubleday, 1961.
12. Shepherd D. G., *Elements of Fluid Mechanics*, Harcourt, Brace & World, 1965.
13. Giles R.V., *Meccanica dei fluidi e idraulica*, Etas Libri, Milano 1975.

PROBLEMI RISOLTI

5.1. Una corrente d'aria indisturbata a 20°C, 1 kg/cm² e velocità 15 m/s, lambisce una lastra piana. Trovare lo spessore dello strato limite in un punto a 1,5 m dal bordo d'attacco.

In queste condizioni la viscosità cinematica dell'aria è di 1,62 x 10^{-5} m²/s. Il numero di Reynolds, basato sulla lunghezza della lastra, è

$$N_{R_x} = Ux/\nu = 15 \times 1{,}5/(1{,}62 \times 10^{-5}) = 1{,}39 \times 10^6$$

Troviamo ora lo spessore dello strato limite, nell'ipotesi che quest'ultimo sia laminare. Usando la (*5.5*),

$$\delta/x = 4{,}64/\sqrt{N_{R_x}}, \quad \delta/5 = 4{,}64/(1{,}39 \times 10^6)^{1/2}, \quad \delta = 0{,}0059 \text{ m} = 0{,}59 \text{ cm}.$$

Nel caso che lo strato limite sia turbolento fin dal bordo d'attacco,

$$\delta/x = 0{,}376/(N_{R_x})^{1/5}, \quad \delta/5 = 0{,}376/(13{,}9 \times 10^5)^{1/5}, \quad \delta = 0{,}0334 \text{ m} = 3{,}34 \text{ cm}.$$

E vediamo quanto diverse risultano le risposte, a seconda che il moto sia laminare o turbolento. Nessuna delle due risposte è comunque corretta, perché lo strato limite non è completamente laminare, né completamente turbolento sull'intera lunghezza. La distanza di transizione è stata trovata sperimentalmente, e corrisponde a $N_{R_x} = 3{,}2 \times 10^5$. Qui allora questa lunghezza di transizione X_T vale

$$X_T = (\nu/U)N_{R_x} = [(1{,}62 \times 10^{-5})/15]\,(3{,}2 \times 10^5) = 0{,}345 \text{ m}$$

E così la risposta che assume uno strato limite turbolento risulta più vicina al valore corretto.

5.2. Ristudiare il problema 5.1, nel caso che parte dello strato limite sia laminare e il resto turbolento.

Lo spessore, al punto di transizione, dello strato limite è

$$\delta_{\text{transizione}} = \frac{(0{,}345)(4{,}64)}{[3{,}2 \times 10^5]^{1/2}} = 0{,}00285 \text{ m} = 0{,}285 \text{ cm}.$$

A questo punto comincia lo strato limite turbolento; se lo fosse stato fin dal bordo d'attacco, la lunghezza X richiesta sarebbe

$$\frac{\delta}{X} = \frac{0{,}376}{(UX/\nu)^{1/5}} \quad \text{ovvero} \quad X^{4/5} = \frac{\delta(U/\nu)^{1/5}}{0{,}376}$$

cosicché

$$X = \left(\frac{\delta}{0{,}376}\right)^{5/4}\left(\frac{U}{\nu}\right)^{1/4} = \left(\frac{0{,}285 \times 10^{-2}}{0{,}376}\right)^{5/4}\left(\frac{15}{1{,}62 \times 10^{-5}}\right)^{1/4} = 0{,}07 \text{ m}$$

Il che significa che la lunghezza totale dello strato limite turbolento equivalente sarebbe

$$X = (1{,}50 - 0{,}345) + 0{,}07 = 1{,}225 \text{ m}$$

e $$\delta = \frac{1{,}225(0{,}376)}{[15(1{,}225)/(1{,}62 \times 10^{-5})]^{1/5}} = 0{,}028 \text{ m} = 2{,}8 \text{ cm}$$

5.3. Trovare nel problema 5.1 la resistenza totale.

Nell'ipotesi che lo strato limite sia laminare, dalla (*5.6*) abbiamo

$$\tau_0 = \frac{0{,}323\rho U^2}{(U/\nu)^{1/2}x^{1/2}} = \frac{0{,}323(1{,}22)\,(15)^2\,x^{-1/2}}{[15/(1{,}62 \times 10^{-5})]^{1/2}} = (92 \times 10^{-3})\,x^{-1/2}$$

La resistenza è $$D = \int_A \tau_0\,dA = W\int_0^{1,5} \tau_0\,dx$$

così che $$\frac{D}{W} = 92 \times 10^{-3}\int_0^{1,5} x^{-1/2}\,dx = 0{,}223\,\frac{\text{kg m}}{\text{s}^2\text{ m}} = 0{,}223 \text{ N/m}.$$

Nell'ipotesi di moto turbolento,

$$\tau_0 \;=\; \frac{0{,}0286\rho U^2}{(U/\nu)^{1/5}x^{1/5}} \;=\; \frac{0{,}0286\,(1{,}22)\,(15)^2\,x^{-1/5}}{[15/(1{,}62 \times 10^{-5})]^{1/5}} = 0{,}52\,x^{-1/5}$$

e $$\frac{D}{W} \;=\; 0{,}52\int_0^{5} x^{-1/5}\,dx \;=\; 0{,}90 \quad \text{N/m} = 0{,}091 \text{ kg/m}.$$

5.4. Se la lastra fosse curva come in fig. 5-19, come ne sarebbe influenzato lo spessore dello strato limite nel problema 5.1?

Lungo la superficie superiore avremmo un gradiente di pressione avverso, il che vuol dire che lo strato limite crescerebbe più rapidamente che nel caso della lastra piana, nel quale il gradiente di pressione è zero. Sul ventre vale l'opposto: qui abbiamo un gradiente di pressione favorevole, e lo strato limite cresce più lentamente. Così

$$\delta_{\text{in alto}} \;>\; \delta_{\text{lastra piana}} \;=\; 2{,}8 \text{ cm.}$$

$$\delta_{\text{in basso}} \;<\; \delta_{\text{lastra piana}} \;=\; 2{,}8 \text{ cm.}$$

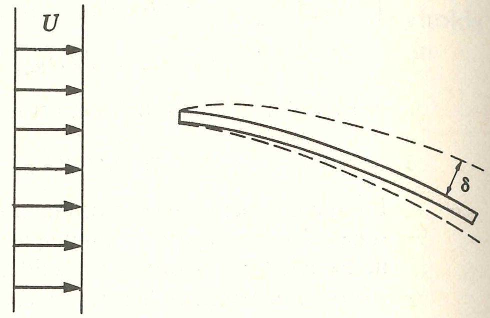


Fig. 5-19

5.5. Trovare la forza totale che un vento da 128 km/h esercita su di un tabellone pubblicitario da 3 m x 12 m, colpendolo ad angolo retto.

Assumiamo un'aria standard, con $\nu = 1{,}62 \times 10^{-5}$ m²/s e $\rho = 1{,}22$ kg/m³:

$$N_R \;=\; UW/\nu \;=\; 35{,}5 \times 3/(1{,}62 \times 10^{-5}) = 6{,}50 \times 10^6$$

essendo W la larghezza di 3 m, e la velocità dell'aria 128 km/h = 35,5 m/s. Dalla tabella 5.1 di pag. 85 ricaviamo $C_D = 1{,}2$; la (*5.18*) ci dà

$$D \;=\; C_D(\tfrac{1}{2}\rho U^2)A \;=\; 1{,}2(\tfrac{1}{2})\,(1{,}22)\,(35{,}5)^2\;36 = 33{,}2 \quad \text{N} = 3{,}38 \text{ kg}_f.$$

5.6. Ricavare un'espressione per il coefficiente d'attrito in un moto a regime in tubo circolare lungo L, con numero di Reynolds minore di 2000.

L'equazione (*5.21*) di pag. 89 ci porge la distribuzione di velocità per un moto laminare:

$$u \;=\; \frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dx}\,(r^2 - R^2)$$

La portata in volume Q è $$Q \;=\; \int u\,dA \;=\; \int_0^R 2\pi u r\,dr$$

Integrando, $$Q \;=\; -\frac{\pi R^4}{8\mu}\frac{dp}{dx}$$

e se V_{av} è la velocità media, $$V_{av} \;=\; \frac{Q}{A} \;=\; \frac{Q}{\pi R^2} \;=\; -\frac{R^2}{8\mu}\frac{dp}{dx}$$

Allora $$\frac{dp}{dx} \;=\; -\frac{\Delta p}{L} \;=\; -\frac{8\mu\,V_{av}}{R^2}$$

Dall'equazione (*5.23*) di pag. 89, abbiamo $$f \;=\; \frac{\Delta p}{L}\,\frac{4R}{\rho\,V_{av}^2}$$

e quindi $$f \;=\; \frac{8\mu\,V_{av}}{R^2}\,\frac{4R}{\rho\,V_{av}^2} \;=\; \frac{32\mu}{\rho R\,V_{av}} \;=\; \frac{64}{(\rho V_{av}D/\mu)} \;=\; \frac{64}{N_R}$$

5.7. Dell'aria a 20°C ed 1 kg/cm² entra in un tubo dal diametro di un pollice (fig. 5-20), a velocità uniforme e con un numero di Reynolds pari a 1000. Trovare la diminuzione di pressione che si verifica tra l'ingresso e un punto a 2,50 m all'interno. La lunghezza d'ingresso L_e è data dalla $L_e/D \;=\; 0{,}0288\;N_R$.

Per l'aria, nelle condizioni assegnate, $\nu = 1{,}62 \times 10^{-5}$ m²/s, $\rho = 1{,}23$ kg/m³ = 0,126 UTM/m³.

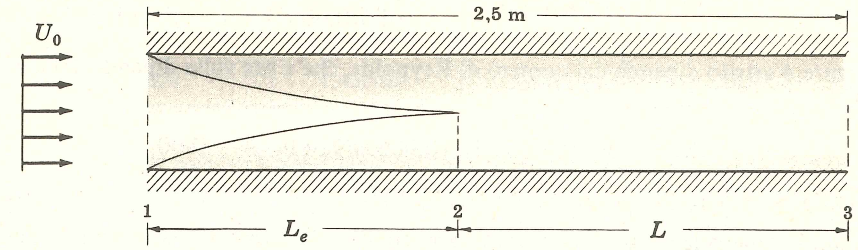


Fig. 5-20

La lunghezza d'ingresso L_e vale

$$L_e = 0{,}0288\,(1000)\,(2{,}54) = 71 \text{ cm}$$

La velocità uniforme all'ingresso è

$$U_0 \;=\; 1000\nu/D \;=\; 1000\,(1{,}62 \times 10^{-5})/0{,}025 = 0{,}65 \text{ m/s}$$

Dal problema 5.6 sappiamo che la velocità media è

$$U_0 \;=\; V_{av} \;=\; -\frac{R^2}{8\mu}\frac{dp}{dx}$$

e la velocità massima nel moto a regime ($r = 0$):

$$U_{max} \;=\; -\frac{R^2}{4\mu}\frac{dp}{dx}$$

Perciò $U_{max} = 2\,U_0 = 2(0{,}65) = 1{,}30$ m/s.

Notiamo che nel passaggio dalla sezione 1 alla 2 lungo l'asse di simmetria, il moto è senza attrito; possiamo allora applicare l'equazione di Bernoulli per trovare la differenza di pressione tra i due punti:

$$p_1 - p_2 \;=\; \tfrac{1}{2}\rho(U_{max}^2 - U_1^2) \;=\; \tfrac{1}{2}\,0{,}126\,(1{,}3^2 - 0{,}65^2) = 0{,}085 \text{ kg}_f/\text{cm}^2$$

Dal problema 5.6 abbiamo, tra i due punti 2 e 3:

$$p_2 - p_3 \;=\; \Delta p \;=\; \frac{8\mu U_1 L}{R^2} \;=\; \frac{8(1{,}62 \times 10^{-5})\,(0{,}126)\,(0{,}65)\,(1{,}79)}{1{,}44 \times 10^{-2}} = 0{,}132 \text{ kg}_f/\text{m}^2$$

E la caduta totale di pressione sarà:

$$p_1 - p_3 \;=\; (p_1 - p_2) + (p_2 - p_3) \;=\; 0{,}085 + 0{,}132 = 0{,}217 \text{ kg}_f/\text{m}^2.$$

5.8. Trovare la portata per il sistema di fig. 5-21. Il fluido è acqua, il tubo è idrodinamicamente liscio; considerare la sola perdita attraverso il tubo.

Scriviamo prima l'equazione dell'energia (*5.22*) di pag. 89 tra i punti 1 e 2:

$$V_1^2/2g + p_1/\rho g + z_1 \;=\; V_2^2/2g + p_2/\rho g + z_2 + H_L$$

in cui $$H_L \;=\; f(L/D)(V^2/2g)$$

Dato che $V_1 = V_2$ e $z_1 = z_2$,

$$(p_1 - p_2)/\rho g \;=\; f(L/D)(V^2/2g) \;=\; H_L$$

Scriviamo ora l'equazione di Bernoulli tra la superficie libera e il punto 1, lungo la linea tratteggiata di figura:

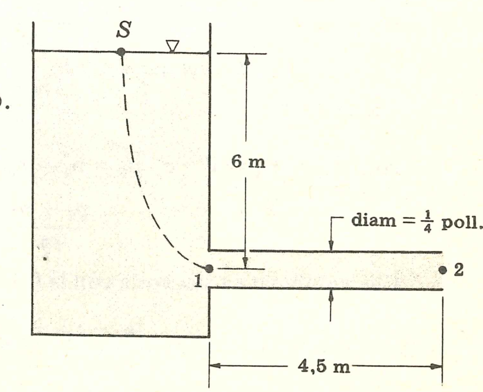


Fig. 5-21

$$p_S/\rho g + V_S^2/2g + z_S = p_1/\rho g + V_1^2/2g + z_1$$

Notiamo anche che $p_2 = p_{atm} = p_S$; allora possiamo sovrapporre le due equazioni:

$$f(L/D)(V_1^2/2g) = H_L = (z_S - z_1) - V_1^2/2g$$

$$V_1^2 = \frac{2g(z_S - z_1)}{f(L/D) + 1} = \frac{19,6 \times 6}{f(4,5/0,0063) + 1} = \frac{117}{f(714) + 1}$$

Il coefficiente d'attrito dipende dal numero di Reynolds, che a sua volta dipende dalla velocità. N_R è dato dalla

$$N_R = V_1 D/\nu = V_1\,(0,0063)/9,3(10^{-7}) = 6800\,V_1$$

(si entra in fig. 5-17, pag. 90, per ricavare $f = f(N_R)$).

Vediamo qui in tabella la soluzione, ottenuta per tentativi. Poniamo un valore per V_1, poi la calcoliamo.

V_1 (di partenza)	N_R	f	V_1 (calcolato)
3	2,03 (10)⁴	0,026	2,4
2,1	1,45 (10)⁴	0,028	2,3
2,4	1,64 (10)⁴	0,0272	2,4

Così $V_1 = 2,4$ m/s e $Q = AV = AV_1 = \frac{1}{4}\pi(0,0063)^2\,(2,4) = 75\,(10^{-6})$ m³/s = 0,075 lt/s.

5.9. Trovare la portata nel sistema di fig. 5-22; il fluido è acqua, il tubo è idrodinamicamente liscio. Trascurare prima nel calcolo le perdite minori, poi tenerne conto.

Scriviamo prima l'equazione di Bernoulli tra i punti 1 e 2:

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{\rho g} + z_2$$

ovvero $$\frac{p_2 - p_1}{\rho g} = (z_1 - z_2) - \frac{V_2^2}{2g} \qquad (a)$$

E ancora tra i punti 3 e 4:

$$\frac{p_3}{\rho g} + \frac{V_3^2}{2g} + z_3 = \frac{p_4}{\rho g} + \frac{V_4^2}{2g} + z_4$$

ovvero $$\frac{p_3 - p_4}{\rho g} = (z_4 - z_3) - \frac{V_3^2}{2g} \qquad (b)$$

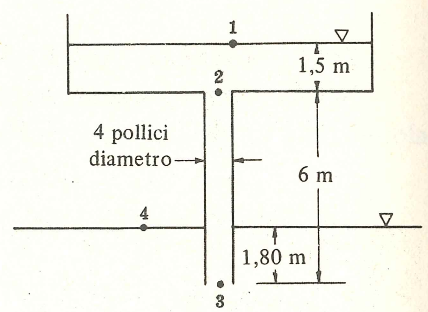


Fig. 5-22

Scriviamo poi l'equazione dell'energia tra 2 e 3, là dove abbiamo delle perdite di carico:

$$\frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 = \frac{p_3}{\rho g} + \frac{V_3^2}{2g} + z_3 + H_L$$

che diventa $$\frac{p_2 - p_3}{\rho g} = (z_3 - z_2) + \frac{fL}{D}\frac{V^2}{2g} \qquad (c)$$

con $V_2 = V_3 = V$ e $p_1 = p_4 = p_{atm}$. Combinando le equazioni (a) e (b) troviamo

$$\frac{p_2 - p_3}{\rho g} = (z_1 - z_2) - (z_4 - z_3)$$

Che combinata a sua volta con la (c) diventa

$$(z_3 - z_2) + \frac{fL}{D}\frac{V^2}{2g} = (z_1 - z_2) - (z_4 - z_3)$$

così che $$V^2 = \frac{2g(z_1 - z_4)}{fL/D} = \frac{18,6(5,7)}{f(6/0,1)} = \frac{1,77}{f}$$

Essendo ora incognite sia f che V, dobbiamo lavorare contemporaneamente, per ricavare una soluzione, con il diagramma dei coefficienti d'attrito. $N_R = VD/\nu = 1,1(10^5)\,V$. Procediamo come nel problema precedente:

V (di partenza)	N_R	f	V (calcolato)
3,0	3,3 (10)⁵	0,0143	11,3
12	1,32(10)⁶	0,0114	12,7
12,9	1,43(10)⁶	0,0112	12,9

e troviamo $V = 12,9$ m/s, e $Q = \frac{1}{4}\pi D^2 V = 106$ lt/s; qui le perdite minori sono state trascurate. Se ne possono avere all'ingresso e all'uscita del tubo diritto; ciò altererebbe l'andamento delle pressioni, come indicato dall'equazione di Bernoulli nei calcoli precedenti. Possiamo tenerne conto modificando l'equazione (c) nel modo che segue:

$$\frac{p_2 - p_3}{\rho g} = (z_3 - z_2) + \frac{fL}{D}\frac{V^2}{2g} + K_1\frac{V^2}{2g} + K_2\frac{V^2}{2g}$$

e combinando come prima con le (a) e (b),

$$\frac{fL}{D}\frac{V^2}{2g} + K_1\frac{V^2}{2g} + K_2\frac{V^2}{2g} = z_1 - z_4$$

ovvero $$V^2 = \frac{2g(z_1 - z_4)}{fL/D + K_1 + K_2} = \frac{18,6\,(5,7)}{f\,(6/0,1) + 0,5 + 1,0} = \frac{106}{f(60) + 1,5}$$

in cui K_1 = coefficiente di perdita all'ingresso = 0,50 e K_2 = coefficiente di perdita all'uscita = 1,0, sono stati ricavati dalla tabella 5.2 di pag. 90. Allora, per tentativi, possiamo ricavare f e V nello stesso modo di prima.

V (di partenza)	N_R	f	V (calcolato)
3	3,3(10)⁵	0,0143	6,8
7,2	8(10)⁵	0,0122	7,0
7,0	7,76(10)⁵	0,0122	7,0

Troviamo così $V = 7,0$ m/s e $Q = \frac{1}{4}\pi D^2 V = \frac{1}{4}\pi\,(0,1^2)(7,0) = 0,057$ m³/s.

5.10. L'acqua esce da un grande serbatoio, secondo lo schema di fig. 5-23; trovare la portata in volume.

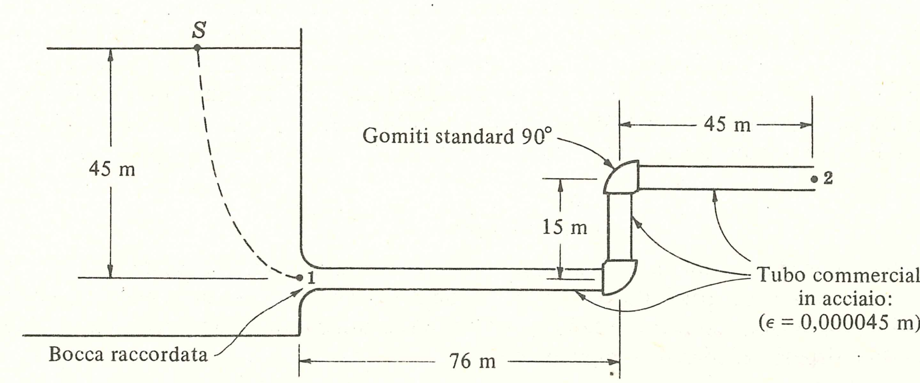


Fig. 5-23

Scriviamo prima l'equazione di Bernoulli tra superficie libera e ingresso in tubazione; per la continuità, $V_1 = V_2 = V$.

$$\frac{p_1 - p_S}{\rho g} = (z_S - z_1) - \frac{V_1^2}{2g}$$

Scriviamo poi l'equazione dell'energia tra le sezioni 1 e 2:

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho g} = (z_2 - z_1) + \frac{fL}{D}\frac{V^2}{2g} + K_1\frac{V^2}{2g} + 2K_2\frac{V^2}{2g}$$

con K_1 = coefficiente di perdita in bocca raccordata = 0,25, e K_2 = coefficiente di perdita al gomito = 0,90. Combinando le due equazioni

$$(fL/D + K_1 + 2K_2 + 1)\frac{V^2}{2g} = (z_S - z_2)$$

ovvero $$V^2 = \frac{2g(z_S - z_2)}{fL/D + K_1 + 2K_2 + 1} = \frac{19{,}6(30)}{f(136/0{,}152) + 0{,}25 + 2(0{,}90) + 1} = \frac{588}{f(900) + 3{,}05}$$

Sia f che V sono incognite, quindi per avere una soluzione dobbiamo lavorare contemporaneamente con il diagramma dei coefficienti d'attrito. Ricaviamo N_R:

$$N_R = VD/\nu = V(0{,}15)/(9{,}3 \times 10^{-7}) = 1{,}63 \times 10^5\ V, \quad \text{e} \quad \epsilon/D = 0{,}000045/0{,}15 = 0{,}00030$$

V (di partenza)	N_R	f	V (calcolato)
3	$4{,}9(10)^5$	0,0165	5,7
6	$9{,}8(10)^5$	0,0120	6,5
6,5	$1{,}05(10)^6$	0,0120	6,5

Troviamo così $V = 6{,}5$ m/s e $Q = AV = \frac{1}{4}\pi D^2 V = \frac{\pi}{4}(0{,}15)^2(6{,}5) = 0{,}11$ m³/s.

5.11. Studiare il moto laminare viscoso a regime che si sviluppa tra due lastre parallele, una delle quali è in moto come in fig. 5-24: si tratta di un moto di Couette. La lastra superiore è dotata di velocità U rispetto a quella di sotto; la pressione all'ingresso della regione del moto è p_2, quella all'uscita è p_1.

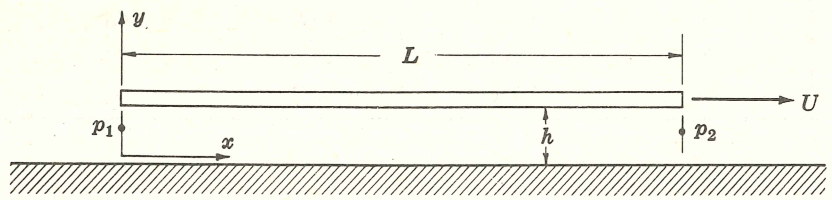


Fig 5-24

Partiamo dall'ipotesi che la lunghezza L della lastra sia molto maggiore della distanza h, in modo da poter trascurare gli effetti di ingresso o di transitorio. Il moto è dunque essenzialmente unidimensionale, con variazioni di velocità attraverso il condotto nella sola direzione y. Il sistema di riferimento è solidale alla lastra in moto; le lastre sono molto estese nella direzione z, tanto che il moto in quella direzione non riveste interesse. Nell'ipotesi di moto incompressibile, le equazioni dell'equilibrio dinamico si ricavano direttamente dall'equazione generale del moto di Navier-Stokes; si può anche scrivere il bilancio della quantità di moto per un elementino di fluido. Le equazioni del moto diventano

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \qquad 0 = -\frac{\partial p}{\partial y}$$

in cui μ è la viscosità del fluido, u e v le componenti in direzione x ed y della velocità, misurate rispetto alla lastra in moto. Con quest'ultima si sposta anche il sistema di riferimento, ma per convenienza l'origine degli assi coincide con la lastra fissa; quest'ultima quindi è dotata di velocità $-U$ rispetto al sistema coordinato e rispetto alla lastra in movimento.

Non essendovi variazione nella direzione delle x, l'equazione di continuità $\partial u/\partial x + \partial v/\partial y = 0$ ci dice che la componente v della velocità secondo le y dev'essere zero, e quindi $\partial p/\partial y$ dev'essere anche zero, e la pressione dev'essere solo una funzione di x. Se integriamo le equazioni del moto, con le condizioni al contorno che sia $u = -U$ per $y = 0$ ed $u = 0$ per $y = h$, otteniamo

$$u = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}(y^2 - hy) + U[(y/h) - 1]$$

Essendo la pressione p una funzione della sola x, ed u della sola y, la portata totale $Q = \int_0^h u\,dy$ si può calcolare, e si trova anche la caduta di pressione:

$$Q = -\frac{h^3}{12\mu}\frac{dp}{dx} - \frac{Uh}{2}$$

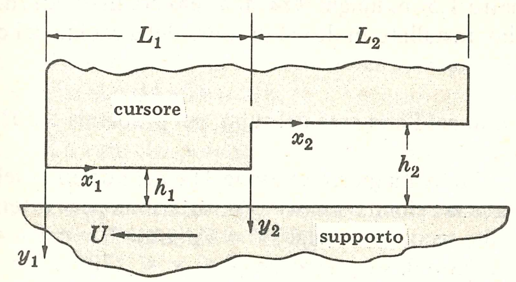
$$p_2 - p_1 = -\frac{12L\mu}{h^3}\left(\frac{Uh}{2} + Q\right)$$

Le precedenti equazioni ci dicono che il gradiente di pressione è costante, e collega la caduta di pressione alla portata, che a sua volta è riferita alla lastra in moto, perché è quest'ultima che contiene gli assi x, y, z. Se la portata è positiva, essa è diretta nel senso delle x; se il gradiente di pressione è zero, il profilo delle velocità è lineare e abbiamo un moto con taglio semplice.

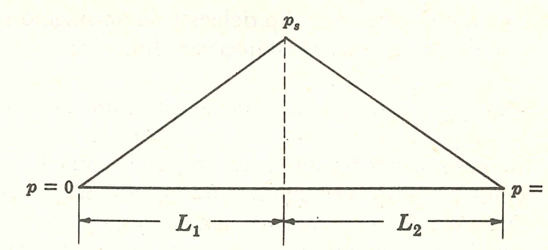
Se avessimo adottato l'origine degli assi sulla lastra in moto, con l'asse delle y orientato verso il basso, le equazioni differenziali sarebbero state le stesse, con delle diverse condizioni al contorno: $y = 0$, $U = 0$; $y = h$, $u = -U$. Le velocità sono di nuovo misurate rispetto alla lastra in moto, e troviamo la stessa Q di prima.

5.12. La lubrificazione dei cuscinetti è un classico problema di fluido-dinamica. Il lubrificante racchiuso tra l'elemento fisso (supporto) e l'elemento in moto (cursore) è un fluido viscoso; studiandone il moto viscoso laminare, possiamo trovare la distribuzione di pressione, la capacità di carico, l'attrito, ecc. La maggior parte dei cuscinetti opera nel campo laminare, con un piccolissimo numero di Reynolds. La distanza tra supporto e cursore (canaletta) è molto più piccola della lunghezza del cursore stesso, e il moto va a regime nella maggior parte della canaletta. Essendo così piccolo il numero di Reynolds, l'inerzia del fluido è trascurabile rispetto alle forze di pressione e viscose: questo problema è simile a quello del moto Couette, visto nel problema 5.11.

Consideriamo una ralla reggispinta, come in fig. 5-25; le distanze h_1 ed h_2 sono molto più piccole di L_1 ed L_2; la larghezza del cuscinetto nel senso delle z si assume molto grande, in modo da poter trascurare le perdite di fluido in quella direzione. Se la velocità del cursore è U e il fluido ha viscosità μ, trovare la distribuzione di pressione nel cuscinetto.



Cuscinetto



Distribuzione di pressione

Fig. 5-25

Sia la zona L_1 che la L_2 possono essere trattate come nel caso del moto Couette; colleghiamo al cursore il sistema di riferimento in figura, e poniamo che il supporto, che è fisso, si muova con velocità U rispetto al cursore, nel senso delle x negative. Allora in ogni sezione, per $y = 0$, $u = 0$ e per $y = h$, $u = -U$. La pressione manometrica all'ingresso, $x_2 = L_2$, e all'uscita, $x_1 = 0$, è zero. La pressione in corrispondenza al gradino, $x_1 = L_1$ ovvero $x_2 = 0$, è incognita, e va trovata usando la condizione di continuità: $Q_1 = Q_2$. Usando le espressioni trovate nel precedente problema, abbiamo

$$Q_1 = -\frac{h_1^3}{12\mu}\frac{p_s}{L_1} - \frac{Uh_1}{2} = Q_2 = \frac{h_2^3}{12\mu}\frac{p_s}{L_2} - \frac{Uh_2}{2}$$

In ogni zona la pressione varia linearmente con x: la distribuzione di questa grandezza forma un triangolo, come si vede in figura. Il valor massimo p_s si trova uguagliando Q_1 e Q_2:

$$p_s = \frac{6\mu U(h_2 - h_1)}{(h_1^3/L_1) + (h_2^3/L_2)}$$

in cui vediamo che la pressione è solo funzione di x. Il carico totale sopportabile è dato dall'area compresa sotto la curva di distribuzione della pressione. La capacità di carico W per unità di larghezza z è

$$W = (p_s/2)(L_1 + L_2)$$

Fisicamente, se il carico varia, cambiano le distanze h_1 ed h_2, e il cursore si alza o si abbassa al diminuire o all'aumentare del carico.

Una volta nota la velocità su tutto il velo di lubrificante, si può trovare l'attrito integrando lo sforzo di taglio lungo il cursore o lungo il supporto – lasciamo questo al lettore come esercizio. Si troverà che gli sforzi di taglio sulle superfici superiore e inferiore differiscono nettamente, ma se si tiene conto della forza di pressione contro il gradino quando si valuta l'attrito della lastra superiore (cursore), i due procedimenti daranno lo stesso risultato.

PROBLEMI SUPPLEMENTARI

5.13. Trovare lo spessore dello strato limite a 3 m dal bordo d'attacco di una lastra piana lambita da aria (20°C, 1 kg/cm^2), sapendo che la velocità della corrente indisturbata è di 18 m/s. Il moto è laminare.

5.14. Trovare, per il caso del problema 5.13, lo sforzo di taglio a 3 m dal bordo d'attacco.

5.15. Trovare nel problema 5.13 resistenza totale e coefficiente di resistenza, sapendo che la larghezza della lastra è di 0,9 m.

5.16. Elaborare il problema 5.13 nel caso di strato limite turbolento.

5.17. Elaborare il problema 5.14 nel caso di strato limite turbolento.

5.18. Elaborare il problema 5.15 nel caso di strato limite turbolento.

5.19. Ricavare un'espressione del coefficiente d'attrito per la corrente che lambisce una lastra piana. Esprimere il risultato in funzione di un numero di Reynolds, basato sulla lunghezza della lastra.

5.20. Un camion trasporta dei tubi a parete sottile, diametro 1,5 m, lunghi 9 m, alla velocità di 95 km/h. Trovare la potenza in hp richiesta da un singolo tubo, installato molto al di sopra della cabina del camion, per gli effetti della resistenza aerodinamica.

5.21. Quanto vale lo spessore dello strato limite nel punto in cui l'aria esce dal tubo, nel problema 5.20?

5.22. Dell'aria scorre tra due pareti parallele come in fig. 5-26. All'ingresso (sezione 1) e nel nucleo la velocità V_1 è uniforme, e pari a 30 m/s. A 2300 cm a valle la velocità subisce una variazione per l'intera larghezza del vano; essa varia nella zona di strato limite secondo la legge $V = V_c\,(y/\delta)^{1/7}$ in cui $\delta = 0{,}1\sqrt{x}$ con δ ed x misurati in cm. Trovare l'accelerazione sull'asse di simmetria per $0 \leqslant x \leqslant 2300$ cm, e calcolarla per $x = 250$ cm.

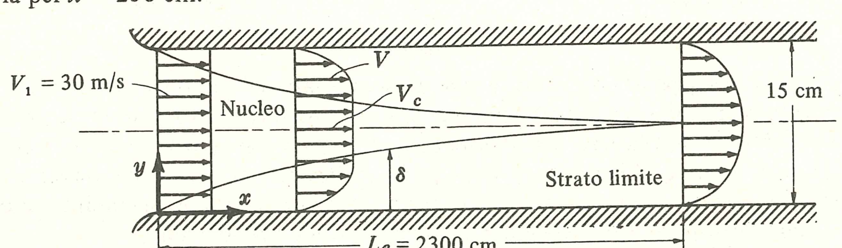


Fig. 5-26

5.23. Il moto laminare su una lastra piana sia descritto da

$$u = Uy/\delta \quad \text{per} \quad 0 \leqq y \leqq \delta$$
$$u = U \quad \text{per} \quad y > \delta$$

in cui $\delta = 0{,}1\sqrt{x}$ ed x = distanza dal bordo d'attacco della lastra; y è la distanza misurata perpendicolarmente alla lastra stessa. Tutte le dimensioni sono in metri; se la lastra è larga 0,30 m e lunga 7,5 m, trovarne la resistenza.

5.24. L'aria scorre tra le lastre parallele di fig. 5-27; all'ingresso la velocità è costante, ed è di 3 m/s. Lo spessore dello strato limite è $\delta = \frac{1}{10}\sqrt{x}$. La larghezza W delle lastre è molto maggiore della distanza h tra le medesime: si possono quindi trascurare gli effetti al bordo. La distribuzione di velocità nello strato limite è data dalla $u/U = (y/\delta)^2$, in cui U è la velocità al nucleo, y la coordinata misurata dalla parete di una delle due lastre. Trovare la pressione in un punto posto a 7,5 m dall'ingresso. δ e x sono misurati in metri.

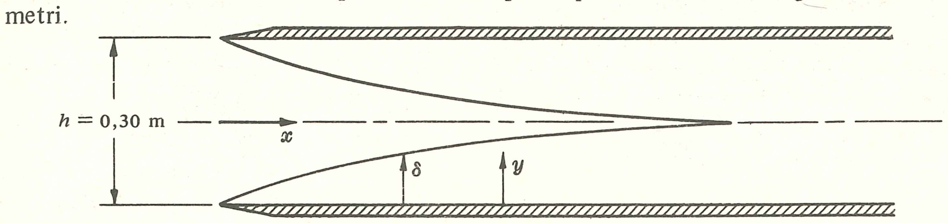


Fig. 5-27

5.25. Nel problema 5.24, trovare la pressione in un punto situato a valle a una distanza doppia di quella necessaria perché il moto vada a regime.

5.26. Trovare, nel problema 5.24, la forza complessivamente esercitata dal fluido sulle pareti, tra l'ingresso e il punto in cui il moto va a regime.

5.27. Applicare il caso 5.24 ad un tubo.

5.28. Applicare il caso 5.26 ad un tubo.

5.29. Spiegare perché, partendo con la stessa velocità iniziale, una sfera a superficie ruvida percorre una distanza maggiore di una a superficie liscia.

5.30. Indicare un valore approssimato per la velocità iniziale di una palla da golf che dopo il tiro percorre 225 m, e colpisce il prato a 6 m/s.

5.31. Trovare quale forza viene esercitata sull'antenna radio, dal diametro di 3 mm e lunga 1,2 m, di un'auto che viaggia a 96 km/h.

5.32. Trovare che potenza è necessaria per vincere la forza del problema 5.31.

5.33. Un peso di 2,25 kg, a forma cubica, cade tra due pareti parallele come in fig. 5-28 alla velocità di 0,15 m/s. Trovare la viscosità dell'olio.

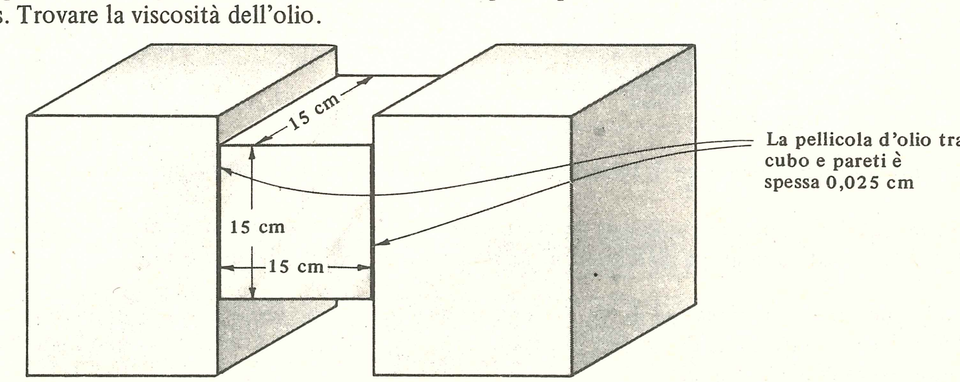


Fig. 5-28

5.34. Per ridurre in un turbocompressore la velocità relativa tra parti in moto, si usa un cuscinetto a manicotto rotante montato tra albero e sede del cuscinetto stesso.

Nello schizzo di fig. 5-29 sono indicate in millimetri le dimensioni del cuscinetto; l'albero ruota ad una velocità di 60000 giri/min. L'olio che viene usato per questi cuscinetti ha una viscosità $\mu = 5{,}0 \times 10^{-4}$ kg s/m^2. Tenendo presenti le varie tolleranze C_1, C_2, C_3 tra cuscinetto, sede dello stesso ed albero, trovare la velocità angolare del suddetto.

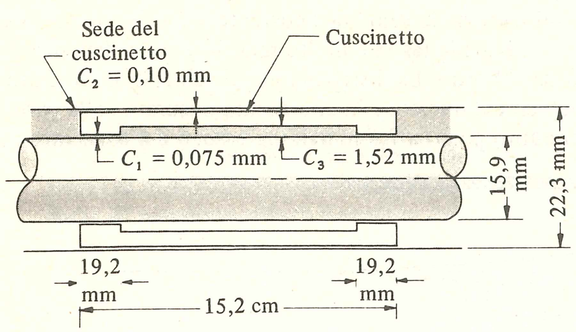


Fig. 5-29

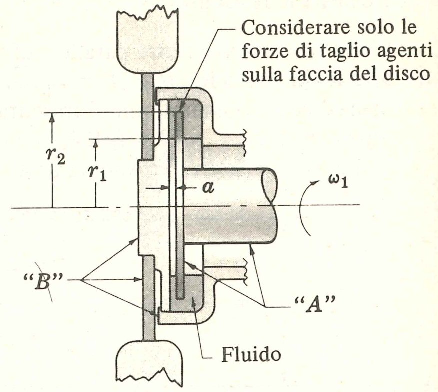


Fig. 5-30

5.35. Vediamo in fig. 5-30 il comando di un ventilatore, progettato in modo che esista moto relativo tra albero motore con assieme disco "A" e carcassa con assieme ventilatore "B". Le rispettive velocità angolari sono ω_1 e ω_2 ($\omega_1 > \omega_2$). Il momento torcente T viene scambiato per mezzo di un fluido a viscosità μ. Trovare il gioco a richiesto nelle condizioni assegnate, esprimendolo in funzione di ω_1, ω_2, μ, r_1, r_2, T.

5.36. Dell'acqua a 15,5 °C ($\nu = 1{,}13 \times 10^{-6}$ m^2/s) scorre attraverso un tubo liscio dal diametro interno di 1/8 di pollice come in fig. 5-31. Considerando le sole perdite d'attrito tra le sezioni 1 e 2, trovare la velocità all'uscita (sezione 2).

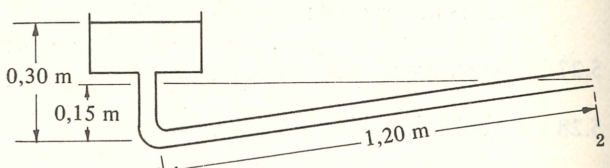


Fig. 5-31

5.37. L'aria scorre in un tubo di acciaio galvanizzato (ϵ = 0,00015 m) dal diametro di 1,05 m, lungo 240 m, alla temperatura di 15,5 °C e con una portata di 340 m^3/min. Se la variazione di pressione statica è zero, qual è la differenza di quota tra ingresso e uscita?

5.38. Calcolare la velocità media dell'acqua, a 20 °C, nella tubazione di fig. 5-32.

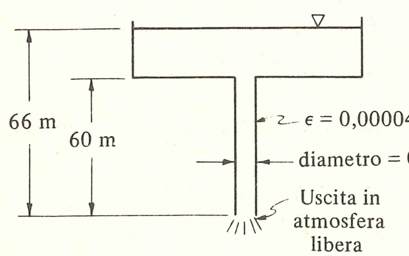


Fig. 5-32

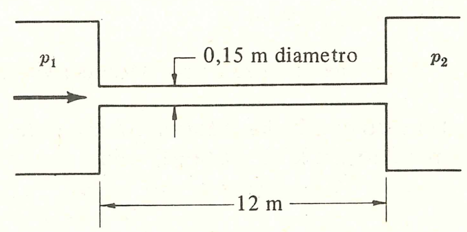


Fig. 5-33

5.39. Trovare per quale lunghezza di tubo si avrà nel problema 5.38 la massima portata.

5.40. Due serbatoi d'acqua sono collegati da un tubo liscio, lungo 30 m e con un diametro interno di 0,05 m. Qual è la portata quando la differenza di quota tra i due peli liberi è di 7,5 m?

5.41. Tra le due camere in pressione di fig. 5-33 scorre aria in un tubo liscio da 0,15 m di diametro, alla velocità di 30 m/s. Trovare la differenza di pressione $p_1 - p_2$ nell'ipotesi che non vi siano perdite minori. La temperatura dell'aria è di 20 °C.

5.42. Trovare nel problema 5.41 la differenza di pressione, tenendo conto delle perdite minori.

5.43. Un contenitore di vetro a pareti parallele, usato per lavare negative fotografiche, è dotato di un sifone che da un lato porta via l'acqua. Come si vede in fig. 5-34, l'acqua entra fino a raggiungere il colmo del sifone, poi viene chiusa. A questo punto entra in funzione il sifone, fino a scoprire la sua bocca di presa, e il ciclo ricomincia con nuova acqua che entra. Quanto dura il periodo di svuotamento?

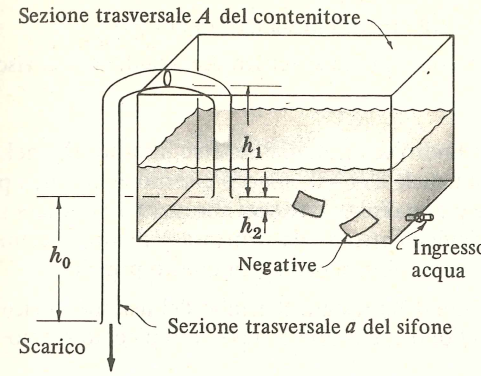


Fig. 5-34

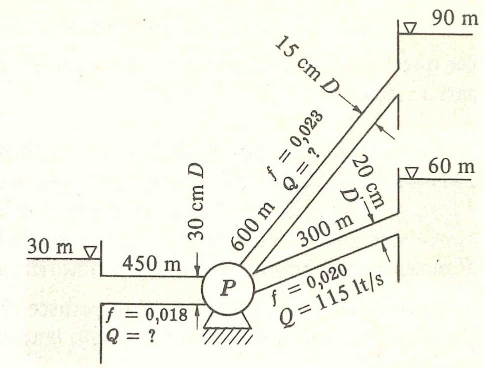


Fig. 5-35

5.44. Nel sistema di fig. 5-35 il tubo da 0,20 m di diametro è percorso da una portata d'acqua di 115 lt/s verso il serbatoio; calcolare le portate negli altri tubi, e la potenza necessaria nella pompa. Sono assegnati i coefficienti d'attrito f, le lunghezze dei tubi e le elevazioni dei serbatoi.

5.45. Il telescopio da 200 pollici di Monte Palomar è montato su di un meccanismo oscillante, che permette di mettere a fuoco la lente su una stella, o su una nebulosa ben identificate. E' possibile programmare il meccanismo, in modo da poter inseguire una stella di cui sia nota la traiettoria.

A causa del peso eccezionale del telaio e del meccanismo oscillante, il progetto del cuscinetto era critico. Il peso totale del telescopio supera i 450000 kg$_f$, ed è sorretto da due serie di cuscinetti posti alle estremità nord e sud della struttura rotante principale. Il giogo del meccanismo oscillante, dalla forma semicircolare a ferro di cavallo, è sorretto da quattro cuscinetti ammortizzanti idrostatici, ognuno dei quali deve reggere un carico di 74000 kg a velocità zero; in essi quindi l'olio va forzato sotto pressione

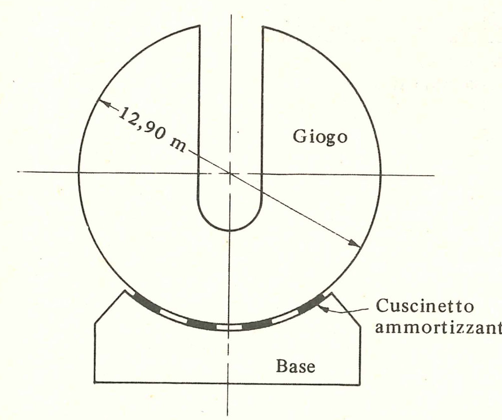


Fig. 5-36

L'olio scorre sulla superficie che circonda le depressioni. La superficie si accoppia con il giogo, con una tolleranza di 0,0125 cm.

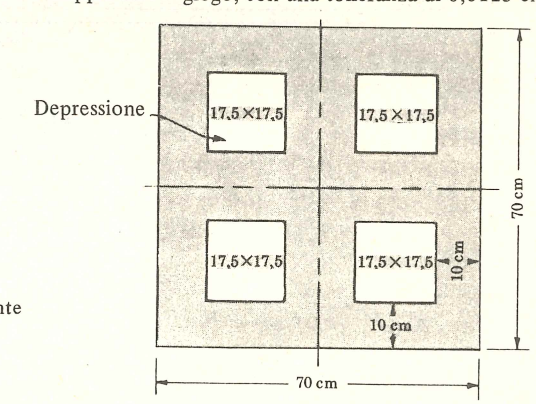


Fig. 5-37

Vediamo nelle figg. 5-36 e 5-37 i particolari del giogo e dei supporti ammortizzanti, ognuno dei quali ha un lato di 70 cm, con quattro depressioni quadrate da 17,5 cm. Attraverso dei tubicini, l'olio viene forzato al centro di queste ultime, e la pressione in ogni vano resta costante e uguale al valore di ingresso. L'olio scorre poi lentamente attraverso la sottile intercapedine tra la superficie del cuscinetto e quella del giogo, per uscire in un serbatoio a pressione atmosferica, dal quale viene poi rimesso in circolo tramite

una pompa . Ammettiamo che il velo d'olio nell'intercapedine sia di 0,0125 cm; trovare:

1. La necessaria portata d'olio
2. La pressione d'ingresso dell'olio
3. La capacità della pompa
4. Il coefficiente d'attrito tra giogo e cuscinetto
5. La capacità richiesta al motore per ruotare il giogo alla velocità di un giro ogni 24 ore.

Per questo calcolo supporremo che l'olio sia un SAE 20, con un peso specifico di circa 0,8 e una viscosità pari a circa $1{,}9 \times 10^{-7}$ kg s/cm^2.

5.46. Lo smorzatore idraulico di fig. 5-38 è costituito da un cilindro esterno, di diametro interno D_c, nel quale è installato uno stantuffo massiccio di diametro D quasi uguale a D_c. Il cilindro esterno è chiuso, a parte il foro di passaggio dello stelo del pistone tuffante, ed è pieno d'olio. Attorno allo stelo è installata una opportuna guarnizione. La carcassa può essere fissata rigidamente ad una struttura, l'albero all'elemento di macchina da ammortizzare; gli ammortizzatori delle automobili si basano su questo principio.

Il piccolo gioco tra i due cilindri impedisce all'olio di fluire dalla testata al gambo del pistone, o viceversa; quest'ultimo può quindi muoversi solo lentamente, con l'olio che scorre attraverso il piccolo spazio disponibile.

Trovare la resistenza dello smorzatore in funzione dei parametri fondamentali, nonché la velocità V alla quale si muove il pistone.

Traccia: Trascurare l'inerzia del fluido nell'intercapedine, e trattare il moto entro quest'ultima come quello in un velo di lubrificante. La differenza di pressione tra testata e gambo del pistone determina la portata tra le due zone. La forza esercitata sullo stantuffo tuffante è pari alla somma delle forze di pressione, più l'azione viscosa di taglio.

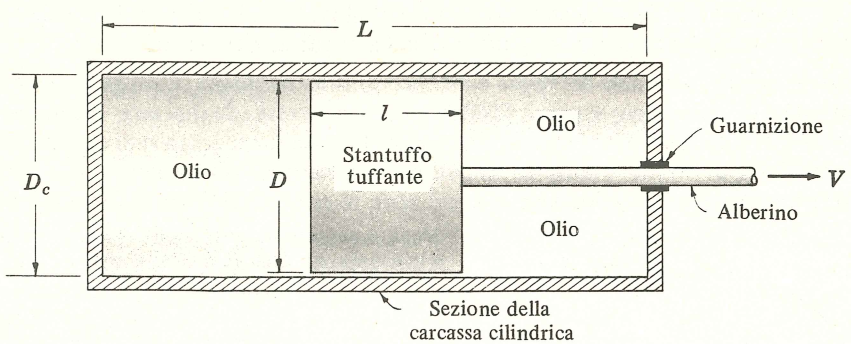


Fig. 5-38

NOMENCLATURA USATA NEL CAPITOLO 5

A = area
C_D = coefficiente di resistenza
C_f = coefficiente d'attrito superficiale
C_L = coefficiente di portanza
D = resistenza; diametro
f = coefficiente d'attrito; notazione funzionale
F_s = forza superficiale, o di contatto
F_{s_x} = forza di contatto in direzione x
h = distanza, o semidistanza tra piani paralleli
H_L = perdita di carico
K = coefficiente di perdite minori
L = lunghezza
m = esponente per la legge della potenza (distribuzione di velocità); massa
$\dot{m}$ = portata in massa
$\dot{M}$ = portata di quantità di moto
n = esponente per la legge della potenza (distribuzione di velocità)
N_R = numero di Reynolds
N_{R_x} = numero di Reynolds secondo la lunghezza $= Ux/\nu$
p = pressione
q = trasmissione di calore per unità di massa fluida in moto
Q = portata in volume
r = coordinata radiale
R = raggio del tubo
u = velocità in direzione x; energia interna per unità di massa
u_τ = velocità d'attrito alla parete, $\sqrt{\tau_0/\rho}$
U = velocità di corrente indisturbata, o massima
v = velocità in direzione r oppure y
V = velocità
$\mathbf{V}$ = vettore velocità
V_x = velocità in direzione x
W = larghezza
x = coordinata
X_L = lunghezza perché il moto passi a regime
y = coordinata
z = quota
δ = spessore dello strato limite
ϵ = rugosità superficiale media
η = parametro di similitudine
μ = viscosità
ν = viscosità cinematica
ρ = densità
τ = sforzo di taglio
τ_0 = sforzo di taglio alla parete
ψ = funzione di corrente

CAPITOLO 6

Moto potenziale incompressibile

6.1 TEORIA DEL MOTO POTENZIALE

Nel capitolo 1 abbiamo detto che al di fuori dello strato limite il moto è senza attrito e irrotazionale, ed è quindi noto come moto potenziale. In questo moto la velocità è derivabile da un potenziale scalare di velocità ϕ:

$$\mathbf{V} = -\nabla\phi \qquad (6.1)$$

In questo capitolo studieremo la teoria del moto potenziale bidimensionale incompressibile, valida per il moto subsonico con numero di Mach M minore di circa 0,3. Nel capitolo 8 discuteremo il moto potenziale compressibile, nel quale M si avvicina, o supera l'unità nel moto supersonico. Nel caso di moto incompressibile sono possibili delle semplificazioni che permettono, con l'uso della teoria delle variabili complesse, di tracciare una "mappa" del moto per mezzo delle trasformazioni conformi.

Ricordiamo dal capitolo 3 che la rotazione, o rotore, o vorticità ω di un fluido è definita come

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla\times\mathbf{V} \qquad (6.2)$$

e la velocità angolare di un elemento infinitesimo $\boldsymbol{\Omega}$ di fluido è collegata al rotore dalla

$$\boldsymbol{\omega} = 2\boldsymbol{\Omega} \qquad (6.3)$$

Possiamo chiarire geometricamente questo concetto nella fig. 6-1. Restringendo per semplicità l'analisi ad una componente cartesiana, vediamo che la componente z di $\nabla\times\mathbf{V}$ è

$$\omega_z = (\nabla\times V)_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

e dalla fig. 6-1 vediamo che ω_z è pari al doppio del valor medio della componente rispetto alle z della velocità angolare dell'elemento $\Delta x\Delta y$. La linea Δx ha velocità angolare $(v|_{x+\Delta x} - v|_x)/\Delta x$, la linea Δy ha velocità angolare $-(u|_{y+\Delta y} - u|_y)/\Delta y$; la media è $\frac{1}{2}(\partial v/\partial x - \partial u/\partial y)$, velocità angolare media del quadrato $\Delta x\Delta y$.

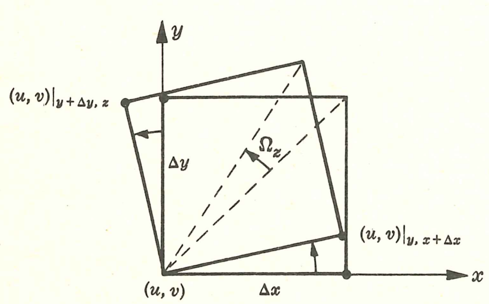


Fig. 6-1. Rotazione di un elemento fluido.

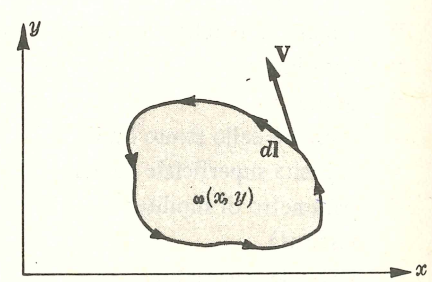


Fig. 6-2. Rotazione e circolazione. $\omega\,(x,y)$ può esistere su tutta l'area, ed è collegato all'integrale circuitato $\oint \mathbf{V}\cdot d\mathbf{l}$.

Se consideriamo adesso un moto bidimensionale qualsiasi (nel piano xy, in modo che esista solo la ω_z) possiamo applicare il teorema di Stokes per collegare la rotazione ad un integrale circuitato così (vedi fig. 6-2):

$$\int_A \boldsymbol{\omega}\cdot d\mathbf{A} = \int \nabla\times\mathbf{V}\cdot d\mathbf{A} = \oint \mathbf{V}\cdot d\mathbf{l} \qquad (6.4)$$

l'integrale della vorticosità ω su un'area assegnata è uguale all'integrale della velocità (lungo la curva) integrata lungo la stessa curva che racchiude l'area. Si tratta di una linea integrale, la circolazione, indicata con Γ. Per una qualsiasi linea chiusa allora la circolazione è data dalla

$$\Gamma = \oint \mathbf{V}\cdot d\mathbf{l} = \int \boldsymbol{\omega}\cdot d\mathbf{A} \qquad (6.5)$$

Possiamo ottenere nel modo che segue una rappresentazione fisica della rotazione in un fluido: pensiamo ad una pagliuzza che flotti sulla superficie del liquido (vedi fig. 6-3); se il fluido è veramente irrotazionale, in nessun punto esiste velocità angolare, e la pagliuzza si sposterà mantenendosi parallela a se stessa. Ovviamente nella realtà la pagliuzza ha una lunghezza finita, e può eventualmente mettersi a ruotare anche se il fluido è irrotazionale. Comunque, al limite, come la lunghezza della pagliuzza diventa infinitesima essa, nel moto irrotazionale, non ruota. Pensiamo invece adesso alla pagliuzza che flotta in una corrente viscosa dotata di rotazione: mentre si sposta nel fluido ruoterà, dato che il comportamento tagliante del fluido tende a muoverne gli estremi con velocità diverse.

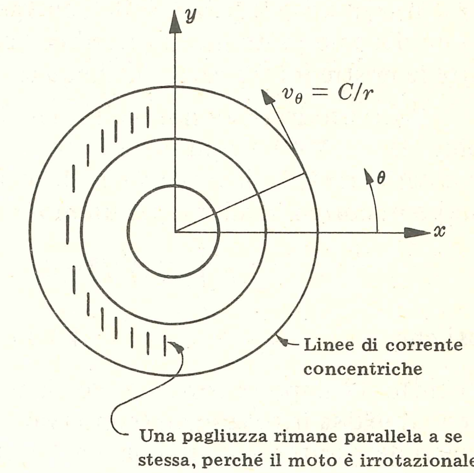


Fig. 6-3. Il vortice potenziale

Un semplice esempio di moto irrotazionale è il vortice potenziale, approssimabile dal comune mulinello, o dal tornado. In esso la velocità (che ha la sola componente angolare v_θ) è data dalla

$$v_\theta = C/r \qquad (6.6)$$

e quindi il potenziale di velocità ϕ è

$$\phi = -C\theta \qquad (6.7)$$

così che $-\nabla\phi$ è $(C/r)\,\hat{\theta}$, con C costante, e $\hat{\theta}$ è un vettore unitario in direzione θ. Il moto è irrotazionale, perché

$$\nabla\times\mathbf{V} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\frac{C}{r}\right) = 0$$

Esiste tuttavia una singolarità per $r = 0$. La circolazione Γ è zero su qualsiasi percorso che non comprende l'origine, ma se detto percorso la comprende esiste un valore finito di Γ, dovuto alla rotazione sull'origine. Con riferimento alla fig. 6-4, forniamo la Γ_1 attorno al profilo C_1:

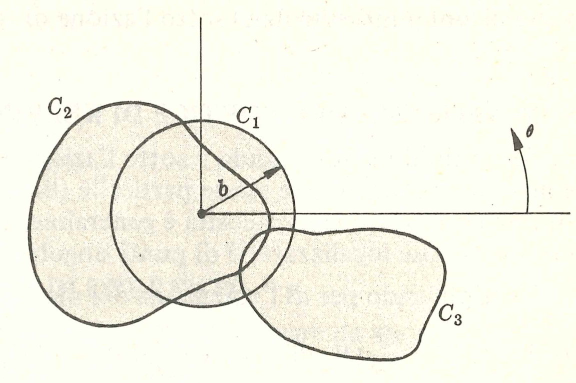


Fig. 6-4. Percorsi di integrazione attorno al vortice potenziale

$$\Gamma_1 = \int_0^{2\pi} v_\theta|_{r=b}\, b\, d\theta = 2\pi C$$

Qualsiasi altro percorso, come C_2, che comprende l'origine ci dà ugualmente $2\pi C$ come circolazione. Il potenziale di velocità si può allora scrivere come $\phi = -\Gamma\theta/2\pi$. Un percorso come C_3 darà circolazione zero. La costante $C = \Gamma/2\pi$ è l'intensità del vortice. Nella realtà un vortice non può avere velocità infinita al centro; il suo nucleo ruota come se fosse un corpo rigido di

diametro a e velocità angolare Ω. Per il teorema di Stokes allora, $\frac{1}{2}a\Omega^2 = 2\pi C$. La tempesta tropicale, o tifone, è un esempio di vortice naturale; l'occhio del tifone costituisce un nucleo centrale di calma relativa, mentre il fluido ruota approssimativamente come un corpo rigido.

6.2 IL TEOREMA DI BERNOULLI

Nel capitolo 3 abbiamo ricavato l'equazione di Bernoulli integrando lungo una linea di corrente l'equazione del moto riferita ad un fluido non viscido. Abbiamo poi trovato la stessa relazione integrando l'equazione dell'energia nel caso del moto senza attrito. Visto che ora ci occupiamo del solo moto incompressibile l'equazione dell'energia non ci serve, e possiamo ricavare tutte le nostre informazioni dall'equazione del moto e da quella di continuità.

Nel moto irrotazionale con forze di massa conservative (ricavabili cioè da un potenziale come $\mathbf{B} = -\nabla\psi$), l'equazione di Bernoulli sussiste tra due punti qualsiasi nella corrente: e non necessariamente sulla stessa linea di corrente. Sia $d\mathbf{r}$ un elementino assunto come distanza nel campo di corrente; allora, per un moto irrotazionale incompressibile e permanente,

$$\rho\int \nabla(V^2/2)\cdot d\mathbf{r} \;=\; -\int \nabla p\cdot d\mathbf{r} - \rho\int \nabla\psi\cdot d\mathbf{r} \qquad (6.8)$$

così che

$$V^2/2 + p/\rho + \psi \;=\; \text{costante} \qquad (6.9)$$

per tutto il campo di corrente. Possiamo inoltre dimostrare che se un fluido è senza attrito e le forze di massa irrotazionali (conservative), il moto è necessariamente irrotazionale (eccettuati magari dei punti singolari, come nel vortice potenziale). Se facciamo il prodotto scalare di $\mathbf{V}$ con l'equazione del moto otteniamo

$$\rho\frac{D}{Dt}(V^2/2) + \mathbf{V}\cdot(\nabla p + \rho\nabla\psi) \;=\; 0$$

che nel moto permanente è

$$(\mathbf{V}\cdot\nabla)(V^2/2 + p/\rho + \psi) \;=\; 0 \qquad (6.10)$$

il che vuol dire fisicamente che $(V^2/2 + p/\rho + \psi)$ è costante in tutto il campo di corrente. Comunque, confrontando la *(6.10)* con la *(6.8)* vediamo che $\nabla\times\mathbf{V} = \boldsymbol{\omega} = 0$ è una condizione necessaria perché la *(6.8)* porti alla *(6.9)*, che deve sussistere in un moto non viscido.

Concludiamo constatando che un moto permanente non viscido deve essere irrotazionale (tranne alcuni punti singolari) sotto l'azione di forze di massa irrotazionali.

6.3 IL TEOREMA DEL VORTICE DI KELVIN; MOTO DEL VORTICE

Se un fluido è non viscido e sotto l'azione di sole forze conservative, su qualsiasi percorso che ne contenga sempre le stesse particelle (linea fluida), la circolazione Γ è costante. Anche se in queste condizioni la vorticosità è generalmente nulla, può esistere una circolazione a causa di regioni vorticose localizzate, o di punti singolari vorticosi.

Moltiplicando per $d\mathbf{l}$ l'equazione del moto e integrando attorno a un percorso assegnato, e ricordando che $\frac{D}{Dt}(\mathbf{V}\cdot d\mathbf{l}) \;=\; \mathbf{V}\cdot\frac{D}{Dt}(d\mathbf{l}) + d\mathbf{l}\cdot\frac{D\mathbf{V}}{Dt}$, otteniamo

$$\frac{D\Gamma}{Dt} \;=\; \oint\frac{D}{Dt}(\mathbf{V}\cdot d\mathbf{l}) \;=\; -\oint\left(\frac{\nabla p}{\rho} + \nabla\psi\right)\cdot d\mathbf{l} + \oint\mathbf{V}\cdot\frac{D}{Dt}(d\mathbf{l})$$

Ma poiché $d\mathbf{l} = d\mathbf{r}$ e $\mathbf{V}\cdot\frac{D}{Dt}(d\mathbf{r}) \;=\; \mathbf{V}\cdot d\mathbf{V} \;=\; d(V^2/2)$,

$$\frac{D\Gamma}{Dt} \;=\; \oint[-dp/\rho - d\psi - d(V^2/2)] \;=\; 0$$

dato che i termini della funzione integranda hanno un sol valore. Allora

$$\frac{D\Gamma}{Dt} \;=\; 0 \qquad (6.11)$$

il che ci dice fisicamente che Γ, calcolata su qualsiasi linea fluida, resta costante nel tempo al nostro muoverci nel fluido; è un risultato molto importante. Notare che la *(6.11)* vale per fluidi sia compressibili che incompressibili.

Consideriamo un vortice tridimensionale, un tornado per esempio, il cui nucleo costituisce una linea di profilo magari irregolare. Questa linea è un continuo, luogo dei centri di vortici bidimensionali, e si chiama *linea vorticosa*, ed è tale che la tangente ad essa condotta in un punto qualsiasi ha la direzione del vettore rotore, o rotazione, in quel punto. In un fluido rotazionale esiste un insieme infinito di linee vorticose; ma se la vorticosità è dovuta al moto di un vortice potenziale, esiste una sola linea, che collega i centri dei vortici potenziali.

Tubo vorticoso è quello che costituisce il luogo delle linee vorticose condotte per tutti i punti di una linea chiusa.

Filamento vorticoso è il tubo vorticoso a sezione trasversale infinitesima. Possiamo pensare al nucleo solido di un tornado come a un tubo vorticoso; man mano che il nucleo si fa più piccolo il tubo diventa a sezione infinitesima, come una linea vorticosa (vedi fig. 6-5).

Filamento vorticoso e *linea vorticosa* sono identici, però al filamento noi associamo il concetto di forza, definita come l'integrale $\int \boldsymbol{\omega}\cdot d\mathbf{A}$ esteso alla sezione trasversale del filamento, o anche del tubo vorticoso. Questa forza deve mantenersi costante lungo il tubo vorticoso stesso; lungo il filamento deve restare costante il valore $\boldsymbol{\omega}\cdot d\mathbf{A}$, detto intensità, ovvero vorticosità per unità di area della sezione di filamento. Quindi i filamenti saranno sempre chiusi su se stessi (anelli vorticosi), come succede agli anelli di fumo che si possono fare con una sigaretta, oppure termineranno ai confini del fluido. Un filamento vorticoso non può semplicemente aprirsi e terminare nel fluido, a meno che non sia presente la viscosità per dissiparne la vorticosità.

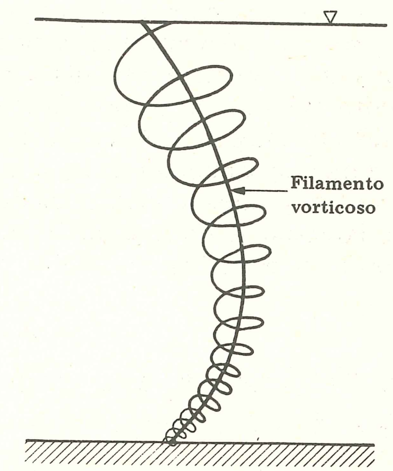


Fig. 6-5. Filamento vorticoso, associato ad un vortice potenziale in un fluido. Nel tornado il nucleo ha dimensioni finite ed è racchiuso in un tubo vorticoso.

Il nostro ragionamento non era limitato al moto permanente, e dobbiamo tener presente che tutte queste linee e filamenti si spostano con il fluido.

6.4 POTENZIALE DI VELOCITA' E FUNZIONE DI CORRENTE

Condizione necessaria e sufficiente perché la velocità si possa derivare da un potenziale scalare ϕ di velocità, con la

$$\mathbf{V} \;=\; -\nabla\phi \qquad (6.12)$$

cioè, in coordinate cartesiane,

$$u = -\partial\phi/\partial x, \quad v = -\partial\phi/\partial y, \quad w = -\partial\phi/\partial z$$

è che sussista la condizione di irrotazionalità. Nel moto generico tridimensionale di un fluido compressibile si può definire un potenziale di velocità: lo vedremo nel capitolo 8; qui ci limiteremo al moto permanente incompressibile bidimensionale. L'ipotesi di moto incompressibile è valida per l'aerodinamica subsonica (numero di Mach $M < 0{,}3$ circa), e la limitazione a due di-

mensioni permette un'agevole analisi matematica, anche se qui potremmo già discutere, qualitativamente almeno, degli effetti tridimensionali.

Con le condizioni di incompressibilità, la velocità espressa in funzione del potenziale ϕ può essere sostituita nell'equazione di continuità $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ per darci la condizione di ϕ armonico (che soddisfa cioè l'equazione di Laplace):

$$\nabla^2\phi = 0 \tag{6.13}$$

che in coordinate cartesiane diventa

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0$$

Importante è anche la funzione di corrente ψ, che è definita in qualsiasi campo di corrente bidimensionale, sia o no il moto irrotazionale o incompressibile. Qui comunque considereremo un moto incompressibile e permanente. Nel moto bidimensionale le linee a ψ costante sono linee di corrente; la differenza tra i valori numerici associati a due di queste è pari alla portata di fluido che scorre tra loro. Possiamo vedere in fig. 6-6 il significato fisico della funzione di corrente: percorrendo un cammino da ψ_1 a ψ_2, il moto si considera positivo quando è da destra a sinistra. Possiamo definire ψ in funzione di $\mathbf{V}$ in coordinate cartesiane:

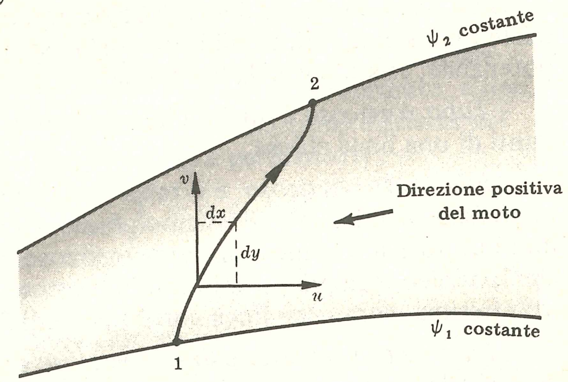


Fig. 6-6. Linee di corrente e funzione di corrente ψ.

$$u = -\partial\psi/\partial y, \quad v = \partial\psi/\partial x \tag{6.14}$$

La portata (positiva da destra verso sinistra) compresa tra ψ_1 e ψ_2 è

$$Q_{12} = \int_1^2 (v\,dx - u\,dy) = \int_1^2 \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy\right) = \int_1^2 d\psi = \psi_2 - \psi_1 \tag{6.15}$$

Finché collega le due linee di corrente, l'integrale è indipendente dal percorso. Fisicamente insistiamo sul fatto che ψ sia ad un sol valore, in modo che sia $\oint d\psi = 0$ su qualsiasi percorso chiuso, a meno che detto percorso non comprenda una singolarità, come un pozzo o una sorgente, nel qual caso ψ potrebbe non essere ad un sol valore, a meno che non se ne riduca il campo di definizione per esempio a $0 < \theta < 2\pi$.

Avremo allora per il moto bidimensionale, dalla condizione d'irrotazionalità, $\nabla \times \mathbf{V} = 0$ ovvero $\partial v/\partial x - \partial u/\partial y = 0$, che insieme alla definizione di ψ ci dà, per un moto potenziale incompressibile, bidimensionale e permanente,

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0$$

così che la ψ è armonica, e in qualsiasi sistema di coordinate vale la

$$\nabla^2\psi = 0 \tag{6.16}$$

Inoltre,

$$u = -\frac{\partial\phi}{\partial x} = -\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{6.17}$$

note come condizioni di Cauchy-Riemann.

Nelle coordinate polari r e θ possiamo porre in questa forma le relazioni fondamentali:

$$v_r = -\frac{\partial\phi}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \quad v_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = \frac{\partial\psi}{\partial r} \tag{6.18}$$

ottenendo naturalmente $\nabla^2\phi = \nabla^2\psi = 0$.

Un'importante conseguenza del fatto che ϕ e ψ sono armoniche, e soddisfano le condizioni di Cauchy-Riemann, è che le linee a ϕ e ψ costanti sono ortogonali. Questo si può facilmente dimostrare provando che

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\phi\,=\,\text{costante}} = -\left.\frac{dx}{dy}\right|_{\psi\,=\,\text{costante}}$$

Lungo una linea a ϕ costante,

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy = 0$$
$$= -u\,dx - v\,dy$$

e lungo una a ψ costante,

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy = 0$$
$$= v\,dx - u\,dy$$

così che dalla $d\phi = 0$ otteniamo $dy/dx = -u/v$, e dalla $d\psi = 0$ abbiamo $dy/dx = v/u$, e perciò

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\phi\,=\,\text{costante}} = -\left.\frac{dx}{dy}\right|_{\psi\,=\,\text{costante}}$$

che corrisponde all'enunciazione matematica del fatto che le linee a ϕ costante formano una rete ortogonale con quelle a ψ costante. Poiché le relative linee sono ortogonali e soddisfano alle stesse equazioni differenziali, i ruoli di ϕ e di ψ possono essere scambiati per rappresentare dei moti differenziati.

Le linee a ϕ costante e ψ costante costituiscono una rete di quadrati cosiddetti curvilinei; in un moto uniforme le linee son tutte rette, ma in genere linee di corrente e linee del potenziale sono curve. Dato che il fluido non può oltrepassare le linee a ψ costante, potremo assumere queste ultime come dei confini solidi. Vale a dire che una linea di corrente, o linea ψ, può essere sostituita da un vero confine materiale senza alterare l'andamento del moto.

Dato che le equazioni $\nabla^2\phi = \nabla^2\psi = 0$ sono lineari, possiamo sovrapporne le soluzioni per moti differenti, aggiungendo direttamente i valori di ϕ e ψ in ogni punto dello spazio per averne i nuovi valori, che rappresentano fisicamente la sovrapposizione diretta delle varie correnti.

Possiamo per esempio sovrapporre le correnti create da una sorgente, o da un pozzo, o da un vortice potenziale in un moto uniforme. Discuteremo nel prossimo paragrafo alcuni semplici andamenti di correnti bidimensionali, e alcuni metodi per sovrapporli, creando più complessi campi di corrente.

Dopo aver determinato le linee ϕ e ψ per un moto assegnato, sono note le componenti della velocità; la pressione si può trovare con l'equazione di Bernoulli.

6.5 ALCUNI MOTI SEMPLICI

Discuteremo qui alcuni moti semplici, insieme alle loro funzioni ϕ e ψ. Nel paragrafo successivo tracceremo dei metodi di soluzione. Una volta tuttavia che siano stati assimilati i moti più semplici, se ne può sintetizzare molti di più complicati, semplicemente sovrapponendo le soluzioni dei primi.

(*a*) **Moto uniforme.**

Assumiamo che il moto riempia tutto lo spazio e sia uniforme; la velocità è $U_0\hat{\mathbf{x}}$, parallela all'asse delle x; $\hat{\mathbf{x}}$ è un vettore unitario in direzione x. Unica componente di velocità è u, così che $-\partial\phi/\partial x = U_0 =$ costante. Essendo v zero, e dovendo ϕ essere indipendente da y, abbiamo

$\phi = -\int U_0\,dx + f(y) = -U_0 x + C_1$. La costante C_1 è arbitraria: noi la scegliamo uguale a zero.

La funzione di corrente si trova con la $U_0 = -\partial\psi/\partial y$, così che, con simile ragionamento,

$$\psi = -U_0 y + C_2 = -U_0 y$$

La portata tra due linee qualsiasi a ψ costante (y = costante) si trova allora con la

$$\psi_2 - \psi_1 = \psi|_{y=y_2} - \psi|_{y=y_1} = Q_{12} = -U_0(y_2 - y_1)$$

negativa se il moto è positivo da destra a sinistra, dato che qui il moto va naturalmente da sinistra verso destra. Allora per un moto uniforme $U_0\hat{x}$ parallelo alle x,

$$\phi = -U_0 x, \quad \psi = -U_0 y \tag{6.19}$$

In fig. 6-7 vediamo le linee ϕ e ψ:

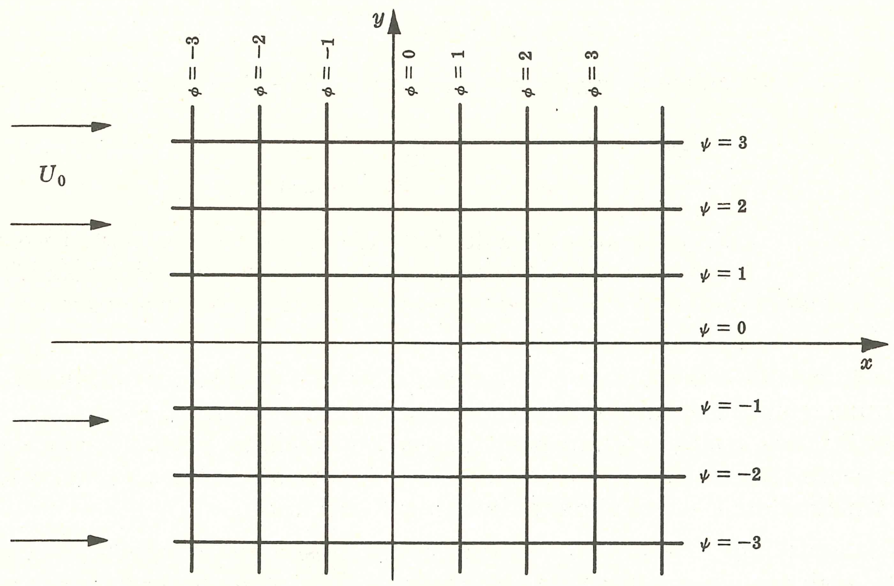


Fig. 6-7. Moto uniforme, parallelo all'asse delle x.

(*b*) **Pozzi e sorgenti.**

Una sorgente o un pozzo puntiformi non sono altro che delle singolarità: da essi si irradiano le linee ψ; attorno ad essi le linee ϕ formano dei cerchi concentrici. Per una sorgente di portata Q, la velocità radiale v_r è $Q/2\pi r$, mentre la velocità angolare v_θ è nulla. Q è l'intensità della sorgente, ed equivale fisicamente alla portata totale per una profondità unitaria del fluido. Essendo allora

$$v_r = -\frac{\partial\phi}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta},$$

$$\psi = -\frac{Q}{2\pi}\theta, \quad \phi = -\frac{Q}{2\pi}\ln r \tag{6.20}$$

Per un pozzo la (*6.20*) è ancora valida ma Q è negativa, e allora v_r è negativa e il moto è diretto verso l'interno. Naturalmente si può aggiungere una costante arbitraria a ϕ o a ψ, senza far cambiare le velocità.

L'andamento della corrente è mostrato in fig. 6-8. All'origine abbiamo naturalmente $\phi \to \infty$ per $r \to 0$, il che non ci sorprende dato che nella realtà dobbiamo sempre avere un'area finita, e non un punto, nella quale deve scorrere il fluido.

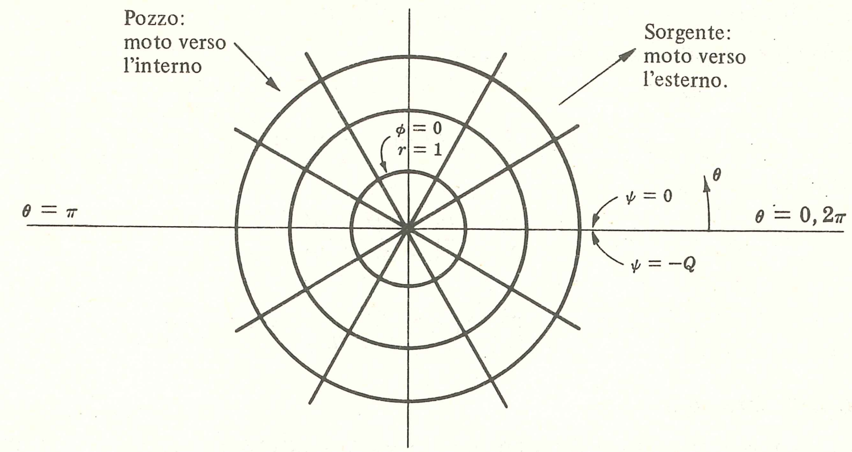


Fig. 6-8. Pozzo e sorgente. Se per $\theta = 2\pi$ diciamo $\psi = -Q$, Q sarà un numero positivo per una sorgente, negativo per un pozzo.

(*c*) **Vortice potenziale.**

Abbiamo già discusso il vortice potenziale; ora lo vedremo in funzione di ϕ e di ψ. Possiamo per esso integrare la $v_\theta = C/r = \Gamma/2\pi r$ per trovare ϕ e ψ, ed otteniamo

$$\phi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\theta, \quad \psi = \frac{\Gamma}{2\pi}\ln r \tag{6.21}$$

Possiamo notare che tra pozzo e sorgente, i ruoli di ϕ e ψ qui sono invertiti; vediamo infatti in fig. 6-9 che le linee a ϕ e ψ costante hanno un andamento reciproco di linee radiali e cerchi concentrici. Il termine $\Gamma/2\pi$ è noto come intensità del vortice.

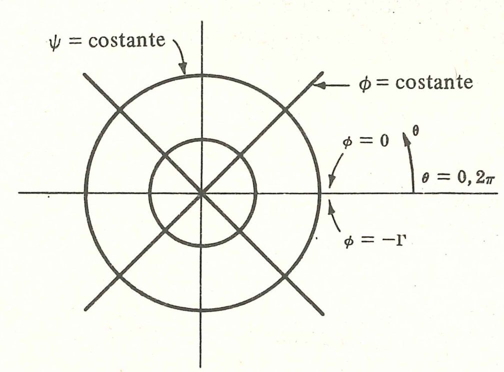


Fig. 6-9. Il vortice potenziale, e le sue linee ϕ e ψ.

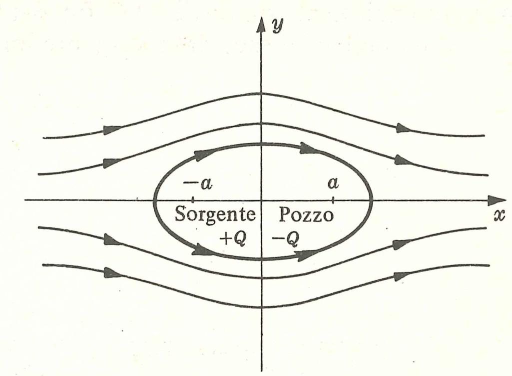


Fig. 6-10. Moto sull'ovale di Rankine. L'ovale è la linea di corrente che divide il fluido, in moto tra pozzo e sorgente, da quello in corrente indisturbata.

(*d*) **Sovrapposizione.**

Come esempio della sovrapposizione di due o più moti potenziali, esaminiamo il campo di corrente di fig. 6-10, l'ovale di Rankine. Una sorgente e un pozzo di uguale intensità sono posti ad uguale distanza dall'origine sull'asse delle x, in un moto uniforme $U_0\hat{\mathbf{x}}$. Tutto il fluido che esce dalla sorgente viene assorbito dal pozzo, ed esiste una linea di corrente ben definita, che divide il fluido di corrente uniforme da quello che si sposta tra sorgente e pozzo. Possiamo pensare a

detta linea di corrente come alla sezione trasversale di un cilindro di forma ovale; se sovrapponiamo allora queste correnti ne otteniamo una più generale, che lambisce detto cilindro ovale. Combinando l'effetto di vari pozzi e varie sorgenti, possiamo ricavare il moto approssimativo attorno ad un cilindro di forma arbitraria, simmetrico rispetto alle x . Usando poi una sorgente distribuita lungo le x possiamo determinare l'esatta corrente attorno a detto corpo; comunque la funzione distribuzione di intensità può essere difficile da calcolare, e comprende la soluzione di un'equazione integrale. Sono metodi utili in aerodinamica.

Se torniamo all'ovale di Rankine, abbiamo

$$\begin{aligned} \phi &= -U_0x - Q/2\pi \ln r_1 + Q/2\pi \ln r_2 \\ \psi &= -U_0y - (Q/2\pi)\theta_1 + (Q/2\pi)\theta_2 \end{aligned} \tag{6.22}$$

che si può scrivere anche

$$\begin{aligned} \phi &= -U_0x - \frac{Q}{4\pi}\ln\frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2} \\ \psi &= -U_0y - \frac{Q}{2\pi}\left(\tan^{-1}\frac{y}{x+a} - \tan^{-1}\frac{y}{x-a}\right) \end{aligned} \tag{6.23}$$

(*e*) **Il metodo delle immagini.**

Come già si è detto, una linea di corrente si può considerare alla stregua di un confine solido. Se possiamo definire un moto tale che una linea a ψ costante coincida con un confine, possiamo anche definire quel moto lungo il confine stesso. Per una corrente che lambisce un oggetto, la superficie di quest'ultimo è una linea a ψ costante.

Spesso è possibile, sovrapponendo certe forme di correnti, creare una linea a ψ costante che coincide con una parete, o con un confine: un utile esempio di questo procedimento è il metodo delle immagini. Consideriamo due correnti identiche, separate da un piano mediano: attraverso quest'ultimo non si deve avere passaggio di corrente, e lo si può quindi considerare come un confine solido.

Il metodo delle immagini consiste nella sovrapposizione di campi di corrente riflettendoli rispetto ad un confine solido, attraverso il quale non c'è passaggio di fluido; con questa visualizzazione è possibile sintetizzare diverse correnti piuttosto complesse.

Consideriamo per esempio la corrente che passa per una sorgente, o per un pozzo, presso la parete (coincidente con l'asse x) di fig. 6-11. Vediamo la corrente che esce dalla sorgente posta in $y = a$, e quella che esce dalla sorgente immagine in $y = -a$. Le due correnti tendono ad avvici-

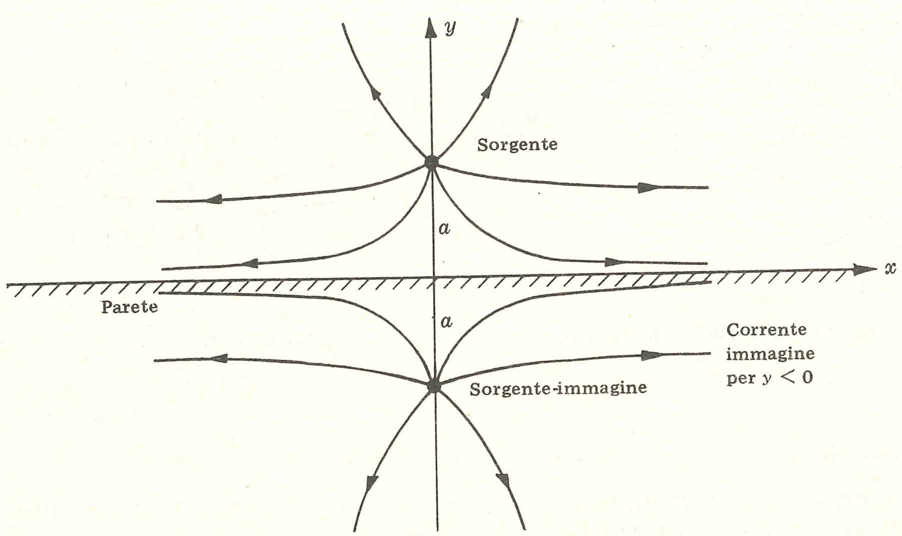


Fig. 6-11. Il metodo delle immagini, usato per creare una corrente da una sorgente presso la parete.

narsi lungo l'asse delle x, che è una linea di corrente, o parete, separatrice. Le funzioni ϕ e ψ sono ovviamente

$$\begin{aligned} \phi &= -\frac{Q}{4\pi}\ln\{[(y-a)^2+x^2][(y+a)^2+x^2]\} \\ \psi &= -\frac{Q}{2\pi}\left(\tan^{-1}\frac{y-a}{x} + \tan^{-1}\frac{y+a}{x}\right) \end{aligned} \tag{6.24}$$

così che in $y = 0$ la componente della velocità normale alla parete è $v(y=0)$, ed è uguale a zero.

6.6 IL POTENZIALE COMPLESSO

In genere i problemi sul potenziale complesso portano alla soluzione dell'equazione di Laplace: $\nabla^2\phi = 0$ e $\nabla^2\psi = 0$, con le adatte condizioni al contorno, che di solito sono: all'infinito il moto è uniforme o nullo; il fluido non attraversa i solidi che lambisce. Tuttavia, a parte alcune semplici geometrie per le quali ϕ e ψ si possono trovare facilmente o risolvendo l'equazione armonica o con l'integrazione diretta della $\mathbf{V} = -\nabla\phi$ quando sia nota la velocità, come nei semplici esempi del paragrafo precedente, la determinazione di ϕ e ψ si fa molto meglio con l'uso della teoria delle variabili complesse, e con l'applicazione delle trasformazioni conformi.

(*a*) **La funzione complessa** $F(z)$.

Nel piano il fatto che ϕ e ψ siano armoniche e soddisfino le equazioni di Cauchy-Riemann è condizione necessaria e sufficiente per definire una funzione complessa F (detta potenziale complesso):

$$F = \phi + i\psi = F(z) \tag{6.25}$$

in cui $i = \sqrt{-1}$ e $z = x + iy$. Nel piano complesso $(\phi + i\psi)$, ϕ e ψ costituiscono una griglia di coordinate ortogonali. Consideriamo ϕ e ψ funzioni di z, variabile complessa, invece che di x, y. Il piano xy rappresenterà il piano su cui si muove fisicamente il fluido.

In generale,

$$z = x + iy = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Vedi fig. 6-12. z è un numero complesso, la cui parte reale è x e la parte immaginaria y. F può essere scritta in funzione di z, e allora la sua parte reale è $\phi\ (x, y)$ e quella immaginaria $\psi\ (x, y)$.

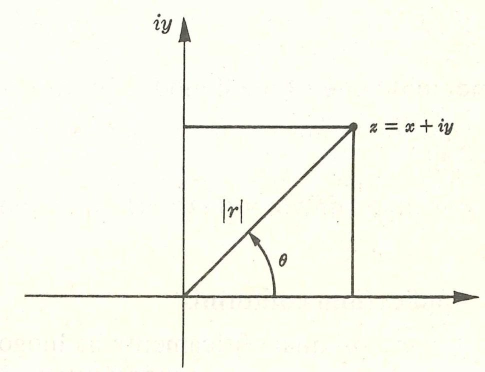


Fig. 6-12. Il piano complesso z.

Le condizioni di Cauchy-Riemann, insieme a quelle che ϕ e ψ siano ad un sol valore e tutte le loro derivate parziali siano continue, implicano che la funzione complessa F è analitica, o olomorfa. La funzione $F(z)$ è analitica quando (1) essa è finita e ad un sol valore entro un cammino chiuso C, e (2) tutte le sue derivate esistono, ed hanno un sol valore. La parte reale e quella immaginaria di una funzione analitica di z sono dette funzioni coniugate, e sono armoniche. ϕ e ψ sono funzioni coniugate, e noi sappiamo che $\nabla^2\phi = \nabla^2\psi = 0$.

Con riferimento alla fig. 6-12, la dF/dz si può valutare per un Δz arbitrario; se lo prendiamo parallelo alle x, abbiamo $\Delta z = \Delta x$, e

$$\frac{dF}{dz} = \frac{\partial\phi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

mentre se prendiamo un Δz parallelo alle y, abbiamo $\Delta z = i\,\Delta y$ e

$$\frac{dF}{dz} = -i\frac{\partial\phi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial y}$$

Entrambe le espressioni sono dunque appropriate, e debbono essere uguali tra loro; allora otteniamo le condizioni di Cauchy-Riemann uguagliando parte reale e parte immaginaria:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \phi}{\partial y}$$

(*b*) **Velocità complessa.**

Differenziando il potenziale complesso F otteniamo

$$\frac{dF}{dz} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

ovvero

$$-\frac{dF}{dz} = u - iv \qquad (6.26)$$

e $-dF/dz = u - iv$ è la velocità complessa. Il potenziale coniugato $\bar{F} = (\phi - i\psi)$ può anche essere differenziato rispetto a $\bar{z}$, $(x - iy)$ come variabile complessa coniugata, per avere $-d\bar{F}/d\bar{z} = u + iv$. Allora

$$\frac{dF}{dz}\cdot\frac{d\bar{F}}{d\bar{z}} = u^2 + v^2 = V^2 \qquad (6.27a)$$

pari al quadrato della velocità nel fluido. Una volta nota $F(z)$ è spesso utile trovare V^2, senza altri calcoli. Per illustrare il significato di $\bar{F}$ poniamo che sia $F = z + iz^2$, allora $\bar{F} = \bar{z} - i\bar{z}^2$. Se $F = z + a^2/z$, $\bar{F} = \bar{z} + a^2/\bar{z}$. $\bar{F}(\bar{z})$ significa che tutti i numeri i espliciti sono mutati di segno, e tutti gli z sono mutati in $\bar{z}$. Alternativamente,

$$V^2 = \left|\frac{dF}{dz}\right|^2 \qquad (6.27b)$$

dal momento che $|V|$ è il modulo di $(u - iv)$.

Una volta nota V^2, per trovare la pressione nella corrente si può usare l'equazione di Bernoulli.

Ponendo $dF/dz = 0$ troviamo un punto di ristagno là dove $u = v = 0$.

(*c*) **Applicazioni conformi.**

Il piano sul quale fisicamente ha luogo il moto è il piano z (ovvero x, y), sul quale le linee ψ = costante sono curve, e rappresentano delle linee di corrente. Nel piano F le ϕ, ψ formano una rete rettangolare. Ora è possibile passare dal piano z ad un altro, diciamo il piano $\zeta = \eta + i\xi$, con una trasformazione che mantiene la natura ortogonale di ϕ e ψ: simile trasformazione è nota come applicazione conforme di forma

$$\zeta = f(z) \qquad (6.28)$$

Si può dimostrare che un triangolo infinitesimo del piano z si applica in un altro triangolo infinitesimo simile nel piano ζ, mantenendo gli angoli e la similitudine. Queste trasformazioni si usano nella compilazione di carte topografiche; la proiezione di Mercatore non è altro che una applicazione conforme della Terra su di una superficie piatta. Con la scelta di adatte funzioni, del tipo (*6.28*), se abbiamo l'andamento della corrente $F(z)$ intorno ad una forma semplice, possiamo ricostruirne l'andamento attorno a forme complesse. Con la (*6.28*) allora possiamo giungere alla $F(\zeta)$ che ci permette la descrizione nel piano ζ di un moto più complesso.

Consideriamo per esempio l'applicazione di fig. 6-13: la metà superiore del piano ζ può essere proiettata nel settore del piano z che si vede con la trasformazione

$$\zeta = z^{\alpha} \qquad (6.29)$$

dalla quale è esclusa l'origine $0 \to 0'$.

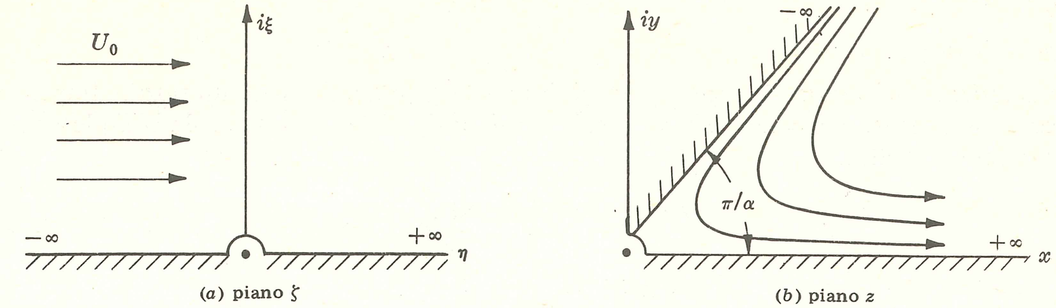


Fig. 6-13. Applicazione conforme della metà superiore del piano ζ nel settore π/α del piano z.

Se dovessimo considerare un moto uniforme da sinistra a destra nel piano ζ,

$$F = -U_0\zeta = -U_0\eta - iU_0\xi = \phi + i\psi \qquad (6.30)$$

e allora questa corrente sarebbe $\quad F = -U_0\zeta = -U_0 z^{\alpha} \qquad (6.31)$

nel piano z come in fig. 6-13(*b*), che rappresenta il moto in un angolo.

6.7 IL POTENZIALE COMPLESSO IN ALCUNI MOTI SEMPLICI

Il metodo delle variabili complesse costituisce uno dei mezzi più poderosi a disposizione nella teoria del moto potenziale, e forma le basi dell'aerodinamica subsonica. Portando con successive trasformazioni un andamento semplice di corrente in un altro più complesso è spesso possibile tracciare l'andamento del moto attorno ad oggetti come cilindri, profili affusolati, ecc. In questo paragrafo presentiamo alcuni potenziali complessi notevoli, e descriviamo l'andamento delle relative correnti. I potenziali complessi possono anche esser sovrapposti, come accadeva per ϕ e ψ, per creare andamenti diversi.

(*a*) **Campo del moto uniforme.**

Come abbiamo già detto,

$$F = -U_0 z = -U_0(x + iy) = \phi + i\psi \qquad (6.32)$$

è il potenziale complesso di un moto uniforme U_0 parallelo all'asse delle x. Uguagliando le parti reali e immaginarie, $\phi = -U_0 x$ e $\psi = -U_0 y$, come abbiamo già visto anche in fig. 6-7.

(*b*) **Pozzi e sorgenti.**

Per una sorgente di intensità Q, il potenziale complesso è

$$F = -(Q/2\pi)\ln z = -(Q/2\pi)\ln re^{i\theta} \qquad (6.33)$$

Conviene rappresentare z come $re^{i\theta}$, in modo da poter separare nelle sue parti reale e immaginaria: $F = -(Q/2\pi)(\ln r + i\theta)$. Qui abbiamo $\phi = -(Q/2\pi)\ln r$ e $\psi = -(Q/2\pi)\theta$, come si vede in fig. 6-8. Un pozzo è la stessa cosa, ma qui Q è negativa, cioè, se Q è ancora l'intensità del pozzo,

$$F = (Q/2\pi)\ln z \qquad (6.34)$$

(*c*) **Vortice potenziale.**

Per il vortice potenziale di fig. 6-9,

$$F = i\frac{\Gamma}{2\pi}\ln z = i\frac{\Gamma}{2\pi}\ln re^{i\theta} \qquad (6.35)$$

così che $\phi = -(\Gamma/2\pi)\theta$ e $\psi = \Gamma/2\pi \ln r$, in cui $\Gamma/2\pi$ è l'intensità del vortice e Γ è la circolazione.

(*d*) **Dipolo, o doppietta.**

Consideriamo nel punto A una sorgente di intensità Q, e nel punto B un pozzo di intensità $-Q$. Il punto A si trovi in $z = ae^{i\alpha}$ e B in $-ae^{i\alpha}$, come in fig. 6-14. Il potenziale complesso nel moto sovrapposto è allora

$$F \;=\; -\frac{Q}{2\pi}\ln(z - ae^{i\alpha}) + \frac{Q}{2\pi}\ln(z + ae^{i\alpha}) \qquad (6.36)$$

Le linee di corrente sono dei cerchi che passano per A e per B.

Se ora A e B si avvicinano, la corrente limite per $A \to B$ $(a \to 0)$ è nota come doppietta, o dipolo; il suo potenziale complesso (per $a \to 0$ e A, B coincidenti) è

$$F \;=\; \frac{me^{i\alpha}}{z} \qquad (6.37)$$

in cui $m = Qa/\pi$ = costante, anche per $a \to 0$. Per $a \to 0$, $Q \to \infty$ e $\lim_{a\to 0} Qa/\pi = m$, intensità del dipolo. Gli andamenti della corrente sono dei cerchi intrecciati, con linee di corrente e potenziale di velocità come in fig. 6-15. Questi andamenti risultano simili alla configurazione del campo elettrostatico di un dipolo positivo-negativo; sono anche simili al diagramma di irraggiamento di un'antenna-dipolo per radio.

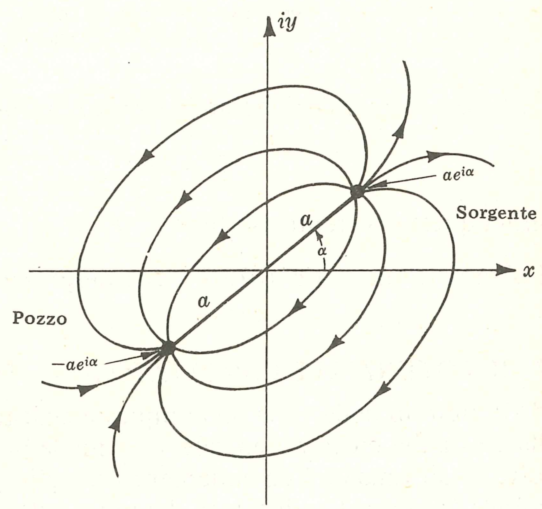


Fig. 6-14. Pozzo e sorgente.

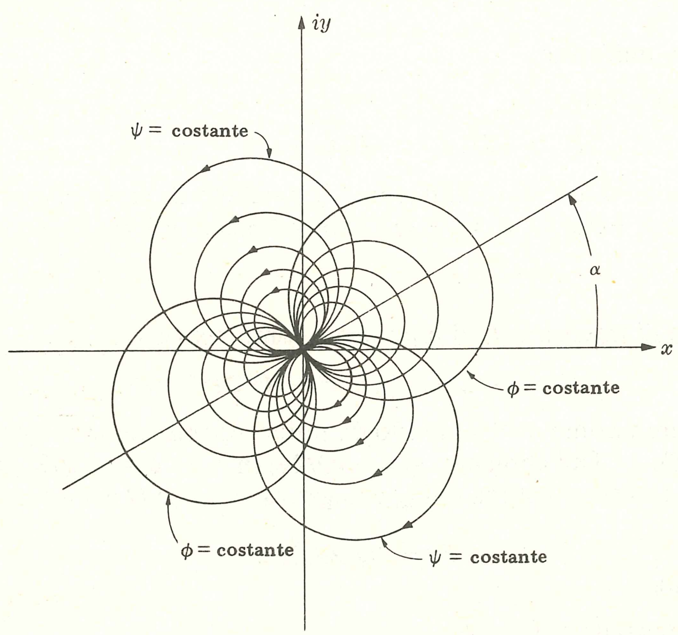


Fig. 6-15. Campo del dipolo.

Separando la (*6.37*) in ϕ e ψ ricaviamo:

$$\phi \;=\; \frac{m(x\cos\alpha + y\sin\alpha)}{(x^2+y^2)}, \qquad \psi \;=\; \frac{m(x\sin\alpha - y\cos\alpha)}{(x^2+y^2)} \qquad (6.38a)$$

che rappresentano dei cerchi tangenti nell'origine. Se $\alpha = 0$ ricaviamo

$$\phi \;=\; \frac{mx}{x^2+y^2}, \qquad \psi \;=\; -\frac{my}{x^2+y^2} \qquad (6.38b)$$

(*e*) **Moto della corrente su di un cilindro circolare.**

In fig. 6-16 si ha un moto uniforme U_0 in direzione delle x positive. Sull'origine si trova un cilindro di raggio a; il potenziale complesso del moto attorno al cilindro è dato dalla

$$F \;=\; -U_0(z + a^2/z) \qquad (6.39)$$

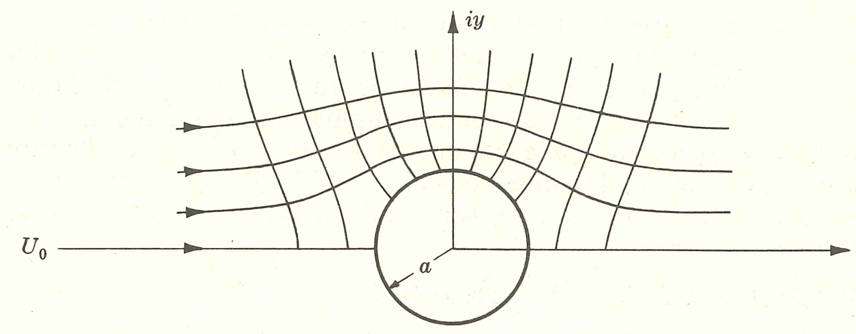


Fig. 6-16. Moto attorno a un cilindro circolare. La figura è simmetrica attorno alle x.

La funzione di corrente si ricava dalla (*6.39*):

$$\psi \;=\; -U_0\left(r\sin\theta - \frac{a^2}{r}\sin\theta\right) \;=\; -U_0 y(1 - a^2/r^2) \;=\; -U_0 y + \frac{a^2U_0 y}{x^2+y^2} \qquad (6.40)$$

che ci fa vedere che il moto attorno ad un cilindro non è altro che la sovrapposizione di un moto uniforme, su un dipolo di intensità $-a^2U_0$. (Il segno meno non fa che invertire le posizioni di pozzo e sorgente viste in fig. 6-15.)

Il potenziale di velocità ϕ è dato dalla

$$\phi \;=\; -U_0 x(1 + a^2/r^2) \qquad (6.41)$$

In $r = a$, il profilo del cilindro deve coincidere con una linea di corrente; ed infatti, per $r = a$, $\psi = 0$.

Il campo di velocità si può trovare con la $-dF/dz = u - iv$ espressa con le coordinate polari:

$$\frac{dF}{dz} \;=\; -U_0 + \frac{U_0a^2}{z^2} \;=\; -U_0 + \frac{U_0a^2e^{-2i\theta}}{r^2}$$

$$=\; U_0\left(\frac{a^2}{r^2}\cos 2\theta - 1\right) + iU_0\frac{a^2}{r^2}\sin 2\theta$$

così che le componenti cartesiane della velocità sono

$$u \;=\; -U_0\left(\frac{a^2}{r^2}\cos 2\theta - 1\right), \qquad v \;=\; -U_0\frac{a^2}{r^2}\sin 2\theta \qquad (6.42)$$

e le componenti in coordinate polari della velocità, v_r e v_θ, sono allora

$$v_r = U_0(1 - a^2/r^2)\cos\theta, \qquad v_\theta = -v_0(1 + a^2/r^2)\sin\theta \tag{6.43}$$

e quindi

$$V^2 = u^2 + v^2 = v_r^2 + v_\theta^2 = \frac{dF}{dz}\cdot\frac{d\bar{F}}{d\bar{z}} = U_0^2\left[1 + \frac{a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2}(\sin^2\theta - \cos^2\theta)\right]$$

Ora la pressione attorno al cilindro si può trovare con l'equazione di Bernoulli

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} = \text{costante} = \frac{p_\infty}{\rho} + \frac{U_0^2}{2} = \frac{p_0}{\rho}$$

in cui p_0 è la pressione di ristagno in qualsiasi punto della corrente in cui V sia zero, e p_∞ è la pressione di corrente indisturbata per velocità U_0. Sulla superficie del cilindro, per $r = a$,

$$p|_{r=a} = p_0/\rho - 2U_0^2(1 + \sin^2\theta - \cos^2\theta)$$

La velocità massima è $2U_0$, e si verifica al culmine e sul fondo del cilindro ($\theta = \pi/2, 3\pi/2$), là dove la pressione è minima. Essendo quest'ultima simmetrica attorno agli assi x ed y, il cilindro non risente di alcuna forza risultante. Nella realtà ovviamente si verificherebbe il distacco nella zona posteriore del cilindro, e si sentirebbe la resistenza. Se comunque il cilindro viene deformato in modo che la sua parte posteriore si riduca a un punto si può impedire il distacco, e la soluzione con il moto potenziale è ottima, eccezion fatta per lo strato limite, che provoca attrito superficiale. Nel prossimo paragrafo discuteremo la teoria dei profili alari, per la quale il moto potenziale permette di avere dei buoni risultati nel calcolo della distribuzione di velocità e di pressione su un corpo affusolato.

6.8 CIRCOLAZIONE. IL TEOREMA DI JOUKOWSKI

Discuteremo qui la sovrapposizione di un moto a vortice potenziale (a circolazione finita) con il moto uniforme su un cilindro. La risultante distribuzione di pressione dà luogo ad un'azione portante sul cilindro. E' la base teorica dell'aerodinamica.

(*a*) Circolazione attorno ad un cilindro circolare.

Consideriamo il moto uniforme, con circolazione, attorno ad un cilindro circolare. La stessa rotazione di quest'ultimo potrebbe indurre la circolazione: se non ci fosse alcun moto uniforme, la velocità periferica di questo cilindro di raggio a corrisponderebbe alla velocità tangenziale che si riscontra in un vortice potenziale ugualmente di raggio a. Il potenziale complesso totale è allora

$$F = -U_0(z + a^2/z) + i\frac{\Gamma}{2\pi}\ln z/a \tag{6.44}$$

così che il cilindro fa parte della linea $\psi = 0$. Per avere l'andamento delle linee di corrente (ψ = =costante) troviamo la velocità complessa $-dF/dz$.

$$\frac{dF}{dz} = U_0(a^2/z - 1) + i\frac{\Gamma}{2\pi z}$$

e per trovare i punti di ristagno risolviamo rispetto a z l'equazione

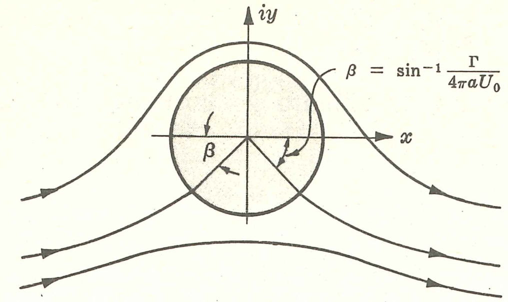
$$U_0(a^2/z - 1) + i\frac{\Gamma}{2\pi z} = 0$$

in modo che

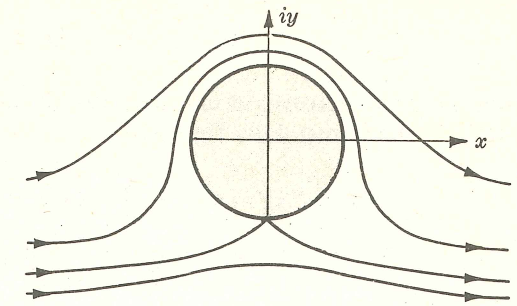
$$z|_{V=0} = a\left(i\frac{\Gamma}{4\pi a U_0} \pm \sqrt{1 - \frac{\Gamma^2}{16\pi^2 a^2 U_0^2}}\right) \tag{6.45}$$

Qui abbiamo tre casi: $\Gamma^2 < (4\pi a U_0)^2$, $\Gamma^2 = (4\pi a U_0)^2$, $\Gamma^2 > (4\pi a U_0)^2$. In fig. 6-17 tracciamo l'andamento della corrente per ogni caso.

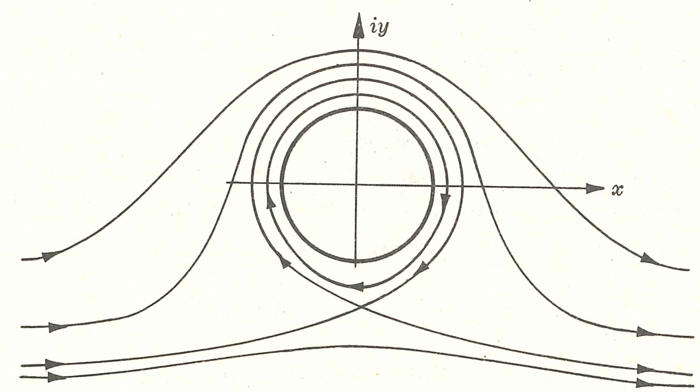
Abbiamo sul cilindro una portanza L, per la quale sviluppiamo qui di seguito una formula generale, dimostrando che essa vale $L = -i\rho U_0\Gamma$; si tratta cioè di una forza agente nella direzione y di $-\rho U_0\Gamma$.



(*a*) $\Gamma^2 < (4\pi a U_0)^2$. I due punti di ristagno si trovano verso il fondo del cilindro.



(*b*) $\Gamma^2 = (4\pi a U_0)^2$. Un punto di ristagno si trova sul punto più basso.



(*c*) $\Gamma^2 > (4\pi a U_0)^2$. Il singolo punto di ristagno si sposta verso il basso.

Fig. 6-17. Le linee di corrente nel moto con circolazione attorno a un cilindro circolare.

Qui il valore di Γ dipende dalla velocità angolare del cilindro, ed è per questo che una palla da golf, o da baseball, o da ping-pong tende a curvare la propria traiettoria se le capita di ruotare su se stessa. Per il moto di fig. 6-17 il valore di Γ è negativo, e la portanza si esercita nella direzione delle y positive.

(*b*) Teorema di Blasius; teorema di Kutta-Joukowski.

Ricaveremo adesso le forze e i momenti che agiscono su un cilindro immerso in un moto potenziale, e applicheremo i risultati al calcolo della portanza che agisce su di un profilo alare. Facendo riferimento alla fig. 6-18, integriamo la pressione attorno al cilindro per trovare la forza totale $X + iY$, nonché il momento M agente sul cilindro per unità di lunghezza. Dall'equazione di Bernoulli, $p = p_0 - \frac{1}{2}\rho V^2$ con p_0 costante. Allora,

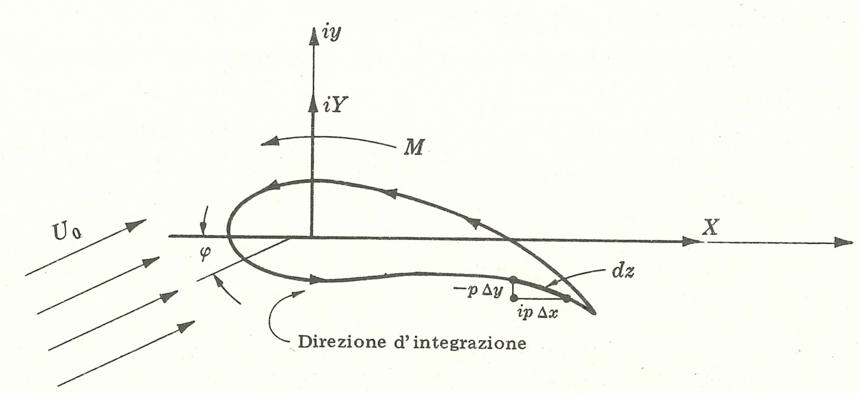


Fig. 6-18. Corrente su di un cilindro, con indicate portanza e resistenza.

$$p = p_0 - \tfrac{1}{2}\rho V^2 = p_0 - \tfrac{1}{2}\rho \frac{dF}{dz}\cdot\frac{d\bar{F}}{d\bar{z}}$$

e l'integrale di p_0 attorno al cilindro non dà alcun contributo. Sul cilindro ψ = costante, così che $d\bar{F} = dF$. Abbiamo dalla fig. 6-18,

$$\begin{aligned} X - iY &= -\oint_C (p\,dy + ip\,dx) = -\oint_C ip\,d\bar{z} \\ &= \oint_C -\tfrac{1}{2}\rho\frac{dF}{dz}\cdot\frac{d\bar{F}}{d\bar{z}}\cdot d\bar{z} = -\tfrac{1}{2}\rho\oint_C\left(\frac{dF}{dz}\right)^2 dz \end{aligned} \tag{6.46}$$

Il momento M è dato dalla

$$\begin{aligned} M &= \oint_C p(x\,dx + y\,dy) = \mathrm{Re}\oint_C pz\,d\bar{z} \\ &= \mathrm{Re}\oint_C -\tfrac{1}{2}\rho\frac{dF}{dz}\cdot\frac{d\bar{F}}{d\bar{z}}\cdot z\,d\bar{z} = \mathrm{Re}\left\{-\tfrac{1}{2}\rho\oint_C z\left(\frac{dF}{dz}\right)^2 dz\right\} \end{aligned} \tag{6.47}$$

in cui Re indica la parte reale.

Una volta nota $F(z)$, possiamo subito trovare portanza e momento; sviluppando poi $F(z)$ possiamo trovare delle espressioni esplicite per X, Y, M. Ci serve per questo il teorema di Kutta-Joukowski, nel caso di una corrente uniforme su un cilindro di forma arbitraria.

La funzione complessa dF/dz si può sviluppare, se $|z|$ è abbastanza grande, come

$$-\frac{dF}{dz} = U_0 e^{-i\varphi} + A/z + B/z^2 + \cdots \tag{6.48}$$

perché evidentemente appena $z \to \infty$, $-dF/dz$, velocità complessa, diventa U_0, valore della velocità di corrente indisturbata che in genere si trova ad un angolo φ rispetto alle x, come si vede in fig. 6-18. Si può allora trovare la F:

$$F = -U_0 e^{-i\varphi} z - A \ln z + B/z + \cdots \tag{6.49}$$

E vediamo che il secondo termine è proprio il potenziale complesso dovuto alla circolazione; allora $A = -i\Gamma/2\pi$. Così

$$\left(\frac{dF}{dz}\right)^2 = U_0^2 e^{-2i\varphi} - i\frac{\Gamma U_0 e^{-i\varphi}}{\pi z} - \frac{\Gamma^2 - 8\pi^2 B U_0 e^{-i\varphi}}{4\pi^2 z^2} + \cdots$$

e dal teorema di Blasius, e per la teoria dell'integrazione complessa, otteniamo

$$X - iY = \tfrac{1}{2}i\rho\left[2\pi i\left(-i\frac{\Gamma U_0 e^{-i\varphi}}{\pi z}\right)\right] = i\rho\Gamma U_0 e^{-i\varphi} \tag{6.50}$$

che è il teorema di Kutta-Joukowski, il quale afferma che la forza risultante (portanza) sul cilindro è diretta perpendicolarmente alla direzione della velocità di corrente indisturbata, ed è pari a $-\rho U_0 \Gamma$. Possiamo concludere in generale che:

1. La forza è sempre perpendicolare alla velocità di corrente indisturbata (ed è quindi una portanza).
2. La portanza è positiva se Γ è negativa (per una U_0 positiva in direzione x). Non esiste portanza senza circolazione, e questa portanza dipende solo da Γ (che a sua volta può dipendere dal profilo).
3. Non esiste forza parallela alla direzione di U_0 (resistenza); quest'ultima può essere prodotta solo dall'attrito superficiale nello strato limite, se il moto attorno al corpo è potenziale e se non c'è distacco.
4. Nei casi reali i risultati visti sono accurati e sono il fondamento dell'aerodinamica subsonica, sempre che il cilindro sia affusolato. Se si dà luogo a separazione, o distacco, si può assistere all'insorgere di una resistenza dovuta ad una diminuzione di pressione nella scia: resistenza non prevista dal moto potenziale. Il moto attorno al cilindro circolare dà sempre distacco (a meno che non si tratti di un moto viscoso molto lento), ed il moto potenziale non è ivi molto accurato.

Riepilogando, la portanza vale $-\rho U_0 \Gamma$; ci resta ora da trovare Γ per un cilindro assegnato, come il profilo di fig. 6-19. Per angolo d'attacco α s'intende quello compreso tra la direzione della corrente indisturbata e la corda del profilo, e per sua definizione L, e quindi Γ, sono zero per $\alpha = 0$. Per certi profili Γ tende ad aumentare con l'aumento di α, fino all'insorgere dello stallo e del distacco: si ha allora, con la caduta di Γ, una drastica diminuzione di portanza.

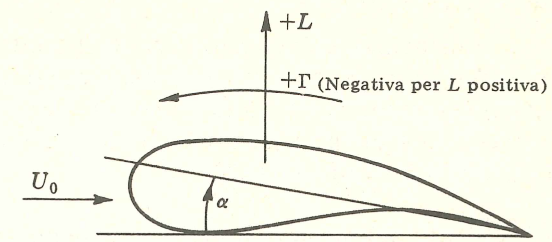


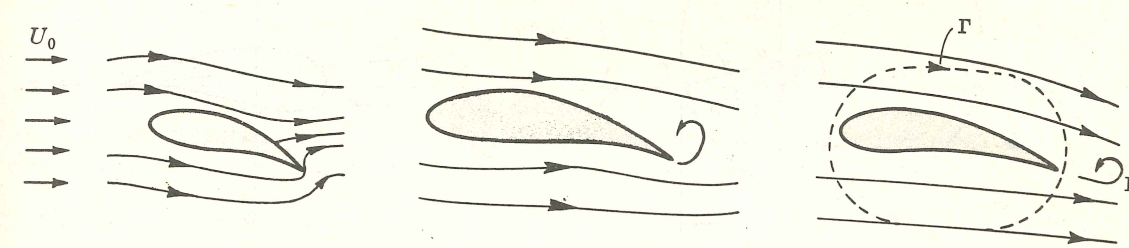
Fig. 6-19. Portanza L su un cilindro. L'angolo d'attacco è α. Quando $\alpha = 0$, $L = 0$, per definizione di α.

6.9 TEORIA DEI PROFILI ALARI

Applicheremo adesso i risultati avuti nel precedente paragrafo al calcolo della portanza di alcuni profili semplici. Ci interessa in particolare la forma del profilo, e la causa fisica della circolazione. Come abbiamo ben chiarito, un cilindro circolare dotato di rotazione genera circolazione; ma cosa ricaveremo per un profilo alare, che certo non può ruotare? Per quest'ultimo la causa della circolazione viene spiegata dall'ipotesi di Joukowski, che afferma semplicemente che nei moti reali le velocità infinite sono inammissibili.

(a) Il profilo.

Come abbiamo visto, la portanza è dovuta alla circolazione: e senza dubbio vi è circolazione attorno ad un profilo. Se ci riferiamo alla fig. 6-20, l'ipotesi di Kutta-Joukowski afferma che il punto singolare sul bordo d'attacco, là dove la velocità secondo la teoria del moto potenziale deve essere infinita, non può esistere in una corrente reale, e detta corrente si regolerà automaticamente, in modo da spostare il punto di ristagno verso il bordo d'uscita ed eliminare così il punto singolare. Il valore della circolazione Γ attorno al profilo è giusto quel tanto che serve a spostare il punto di ristagno verso il bordo d'uscita. Per effettuare questo spostamento Γ dev'essere evidentemente negativa, e quindi la portanza $L = -\rho U_0 \Gamma$ dev'essere positiva, come si vede in figura.



(a) (b) (c)

Fig. 6-20. La circolazione, e la sua formazione attorno ad un profilo. Al progredire della corrente il punto di ristagno si sposta verso la zona posteriore, e a questo spostamento è dovuta Γ. Nelle fig. (a), (b), (c) vediamo gli stadi successivi di funzionamento del profilo.

All'avviarsi della corrente, il moto potenziale si presenta come in fig. 6-20(a); il punto di ristagno si sposta verso la parte posteriore e si forma un piccolo vortice, che si stacca e va a perdersi a valle. Per il teorema di Kelvin la circolazione totale nel fluido dev'essere costante nel tempo, e quindi attorno al profilo si genera una Γ uguale al vortice portante, ma di segno opposto. La circolazione totale nel fluido rimane uguale a zero, ma il suo valore attorno al profilo è un numero

negativo. Il vortice portante resta indietro, e si perde nel campo di velocità. (Un grande profilo di controllo, che comprenda profilo e campo di velocità, darebbe circolazione zero).

La formazione di questo vortice d'uscita si vede bene muovendo un cucchiaio in una tazza di caffè; se il cucchiaio si muove nel liquido con un certo angolo d'attacco, si vede la formazione e il distacco del vortice suddetto. (Vedi fig. 6-21).

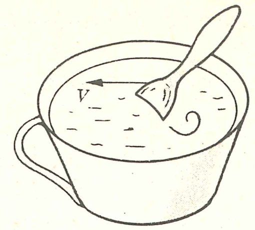


Fig. 6-21. Il cucchiaio genera un vortice d'uscita nella tazza di caffè. Il cucchiaio imita con la sua curvatura un profilo alare.

(*b*) **Calcolo del moto potenziale e della portanza.**

Il moto attorno ad un profilo assegnato può essere descritto da un appropriato potenziale complesso F. Il profilo più semplice è quello di Joukowski, che si può ricavare dalla corrente attorno ad un cilindro circolare con una singola trasformazione conforme. Se ci riferiamo alla fig. 6-22, il moto attorno al cilindro nel piano ζ si applica al moto nel piano z con la trasformazione di Joukowski. Qui la trasformazione da ζ a z è

$$z = \zeta + l^2/\zeta \qquad (6.51)$$

e la corrente attorno al cilindro spostato (centro in C) per la corrente con un angolo d'attacco apparente φ è

$$F = -U_0\left[(\zeta - be^{i\theta})e^{-i\varphi} + \frac{a^2}{(\zeta - be^{i\theta})e^{-i\varphi}}\right] \qquad (6.52)$$

Se $b = 0$ (C sull'origine) la trasformazione di Joukowski applica il cilindro in una ellisse con centro sull'origine e l'asse maggiore lungo le x. Il punto $\zeta = l$ si trasforma in $z = 2l$ ed è il bordo d'uscita, dove dF/dz ha una singolarità che deve essere rimossa dalla circolazione.

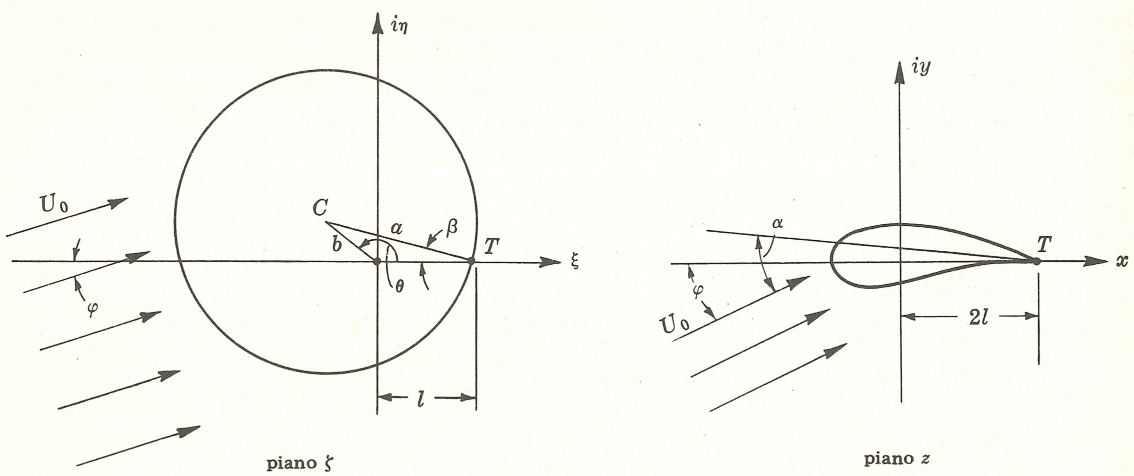


Fig. 6-22. La trasformazione di Joukowski. L'angolo d'attacco apparente è φ; L è $\perp$ a U_0. L'angolo assoluto d'attacco è α, da determinare. Quando $\alpha = 0$, $L = 0$ per definizione di α.

All'equazione (*6.52*) dobbiamo aggiungere il potenziale complesso dovuto alla circolazione, in modo da render finita la velocità sul bordo d'uscita. La $F(\zeta)$ totale attorno al cilindro dev'essere allora

$$F(\zeta) = -U_0\left[e^{-i\varphi}(\zeta - be^{i\theta}) + \frac{a^2e^{i\varphi}}{(\zeta - be^{i\theta})} + i\frac{\Gamma}{2\pi}\ln\left(\frac{\zeta - be^{i\theta}}{a}\right)\right] \qquad (6.53)$$

Nel piano z la velocità complessa che corrisponde al punto T, bordo d'uscita, è

$$\left.\frac{dF}{dz}\right|_T = \left.\frac{dF}{d\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{dz}\right|_{\text{punto } T}$$

e $dz/d\zeta = 1 - l^2/\zeta^2 = 0$ sullo stesso bordo d'uscita. Quindi il valore di $dF/d\zeta$ dev'essere zero in $z = -2l$ perché la dF/dz risulti ivi finita, e questa condizione determina il valore di Γ e quindi la portanza che agisce sul profilo.

Dalla (*6.53*) troviamo $dF/d\zeta = 0$ con la

$$\frac{dF}{d\zeta} = -U_0\left(e^{-i\varphi} - \frac{a^2e^{i\varphi}}{(\zeta - be^{i\theta})^2}\right) + i\frac{\Gamma}{2\pi}\frac{1}{(\zeta - be^{i\theta})} = 0 \qquad (6.54)$$

e dalla fig. 6-22, $(\zeta - be^{i\theta}) = [\zeta - l + ae^{i(\pi-\beta)}]$ così che per $\zeta = 1$ la (*6.54*) ci dà

$$-U_0(1 - e^{-2i(\pi-\beta)+2i\varphi}) + i\frac{\Gamma}{2\pi a}e^{-i(\pi-\beta)+i\varphi} = 0 \qquad (6.55)$$

che si può risolvere rispetto a Γ: uguagliandone le parti reali o quelle immaginarie otteniamo la stessa espressione di Γ:

$$\Gamma = 4\pi aU_0\sin(\pi - \beta - \varphi) = -4\pi aU_0\sin(\beta + \varphi) \qquad (6.56)$$

e vediamo che Γ è un numero negativo che dipende dalla velocità in corrente indisturbata, dall'angolo d'attacco apparente φ, e dai parametri α e β che determinano dimensione e curvatura del profilo. Dato che $L = -\rho U_0\Gamma$ è perpendicolare alla corrente indisturbata, L è un numero positivo per valori positivi di $(\beta + \varphi)$. Questo angolo $(\beta + \varphi)$ si chiama α, angolo assoluto d'attacco. Quando $\alpha = 0$, la portanza L è nulla per definizione.

In aerodinamica s'intende di solito per angolo d'incidenza α e non φ; il coefficiente di portanza C_L è

$$C_L = \frac{L}{c\rho U_0^2/2} \qquad (6.57)$$

in cui L è la portanza per unità di lunghezza del profilo e c la lunghezza della corda, o profondità del profilo. Per un profilo Joukowski $c \approx 4a$ e per C_L abbiamo allora

$$C_L = \frac{\rho U_0(4\pi aU_0)\sin\alpha}{4a\rho U_0^2/2} \cong 2\pi\alpha \qquad (6.58)$$

Come si vede nella (*6.58*), per piccoli α, C_L aumenta linearmente con questo angolo fino a cadere rapidamente al di là di un certo valore del suddetto, l'angolo di stallo α_s, al di là del quale si assiste al distacco e si perde la circolazione. Il modo migliore per tracciare le curve di C_L in funzione di α e per trovare l'angolo di stallo è quello sperimentale.

(*c*) **Effetti tridimensionali.**

La portanza di un profilo è dovuta al vortice lineare che si sposta insieme al profilo stesso (*vortici aderenti*). Abbiamo già mostrato come questi vortici lineari non possono semplicemente terminare alla estremità dell'ala, ma debbono continuare nella corrente libera fino a dissiparsi per viscosità. Se la circolazione fosse uniforme lungo l'ala, i vortici si distaccherebbero all'estremità e finirebbero a valle nei vortici d'uscita, come si vede in fig. 6-23. Il semplice sistema di vortici "a ferro di cavallo" non è comunque corretto, perché il valore di Γ generalmente varia lungo l'ala. Di conseguenza la vorticità si distacca dal bordo

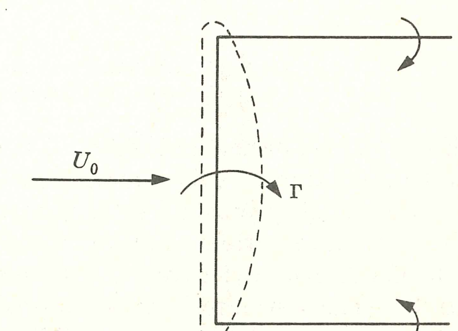
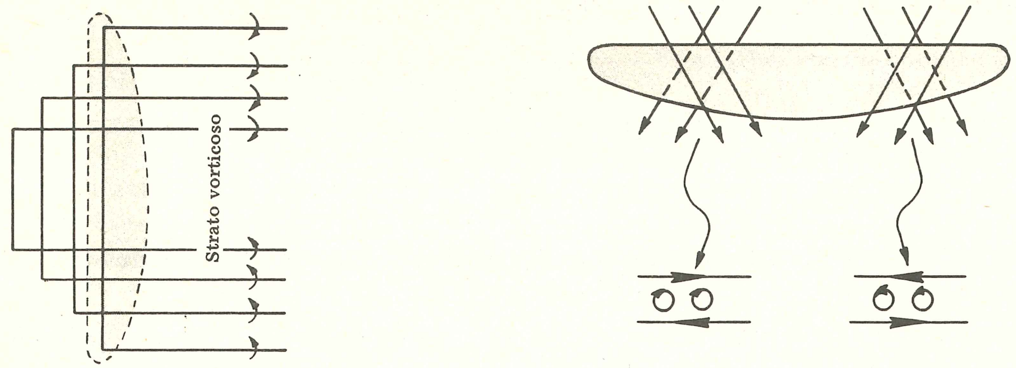


Fig. 6-23. Un sistema semplice di vortici "a ferro di cavallo", su un'ala tridimensionale. Si vede, in pianta, la parte superiore dell'ala.

d'uscita lungo tutta l'ala, generando un foglio vorticoso costituito dalla sovrapposizione di sistemi vorticosi a ferro di cavallo dalle varie intensità, come in fig. 6-24. Si può ottenere in altro modo una rappresentazione fisica del foglio vorticoso, immaginando che a valle dietro l'ala si estenda un piano costituito da cuscinetti a sfere: l'aria che è su tende a scorrere verso il basso, l'aria che è sotto tende a scorrere all'esterno. Questa differenza nella direzione del moto per il vento che esce dal bordo d'uscita genera uno strato, o foglio vorticoso. Subito si può capire la ragione della distorsione della corrente (fig. 6-24(b)), se si ricorda che esiste una differenza di pressione tra dorso e ventre dell'ala, e tra il centro e le estremità della medesima.



(a) (b)

Fig. 6-24. Strato vorticoso dietro un'ala.

Alla fine, a poche lunghezze d'ala a valle, lo strato vorticoso degenera in due linee vorticose separate come in fig. 6-25; è un fenomeno che si può notare negli aerei plurimotori a getto, nei quali le gondole dei motori sono appese all'ala; le scie di vapore lasciate da questi ultimi coalescono per formare due tracce distinte, una dietro ogni ala.

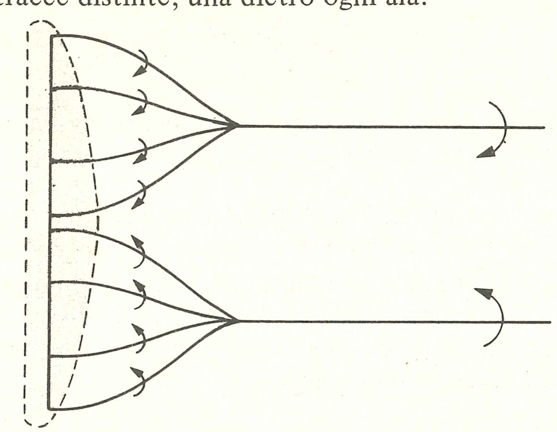


Fig. 6-25. Lo strato vorticoso si arrotola per formare due vortici distinti, separati da una distanza inferiore all'apertura alare.

Un'altra cosa da tenere presente è la resistenza indotta. Lo strato vorticoso induce un *downwash*, o corrente deviata verso il basso, che provoca in effetti una variazione dell'angolo d'incidenza dell'ala e sposta il vettore portanza di un piccolo angolo verso l'indietro, rispetto alla direzione della corrente indisturbata. Il vettore portanza presenta quindi una componente parallela alla direzione del volo, componente che è una resistenza, e si chiama resistenza "indotta". Il resto della resistenza, resistenza "di profilo", è costituita dalla resistenza d'attrito superficiale dello strato limite, e dalla resistenza "di forma" dovuta al distacco dei vortici di Karman nello strato vorticoso (vale a dire, la scia).

Qui non possiamo continuare la discussione, ma ricordiamo che le teorie del moto potenziale e dello strato limite costituiscono la base dell'aerodinamica subsonica.

BIBLIOGRAFIA

1. Glauert H., *The Elements of Aerofoil and Airscrew Theory*, 2ª ed., Cambridge University Press, 1948.
2. Lamb sir Horace, *Hydrodynamics*, 6ª ed., Cambridge University Press, 1932.
3. Milne-Thompson, L.M., *Theoretical Hydrodynamics*, 3ª ed., Macmillan, 1957.
4. Prandtl L., Tietjens O.G., *Applied Hydro-and Aeromechanics*, Dover, 1957.
5. Robertson J. M., *Hydrodynamics in Theory and Application*, Prentice-Hall, 1965.
6. Streeter V. L., *Fluid Dynamics*, McGraw-Hill, 1948.
7. Finzi B., *Aerodinamica*, Tamburini, Milano 1970.

PROBLEMI RISOLTI

6.1. Schema ideale di un tornado può essere il vortice potenziale con un "occhio", o nucleo, rotazionale, che si comporta come un corpo rigido; una regola pratica assegna a questo occhio un raggio dell'ordine di grandezza di 30 m. Come varia la pressione sul terreno, attorno all'occhio? Qual è la massima caduta di pressione per un tornado nel quale la velocità massima del vento è di 160 km/h? Questa depressione è in parte la causa dei danni causati dal tornado, per esempio il sollevamento dei tetti.

La velocità v_θ è $\Gamma/2\pi r$ e quindi

$$\Gamma = 2\pi r v_\theta = 2\pi\ (30\ \text{m})\,(160 \times 1000/3600) = 8{,}4 \times 10^3\ \text{m}^2/\text{s}$$

Dall'equazione di Bernoulli, per aria standard a pressione p_0,

$$p - p_0 = \tfrac{1}{2}V^2\rho = -\frac{\Gamma^2\rho}{8\pi^2 r^2} = -\frac{(8{,}4 \times 10^3)^2\,(1{,}182)}{8\pi^2 r^2} = -\frac{1{,}06 \times 10^6}{r^2}\ \text{N/m}^2$$

Il segno negativo indica che la pressione è minore di quella atmosferica, lontano dal tornado. In $r = 30$ m (il minimo r al quale possiamo applicare la teoria del vortice potenziale) la pressione si riduce a 1160 N/m^2 al di sotto di quella atmosferica.

6.2. In fig. 6-26 una sorgente è collocata alla distanza a da una parete; di quanto sarà su quest'ultima la forza totale di pressione? Dietro la parete ($x > 0$) la pressione è p_0, pressione di ristagno.

Troviamo la corrente assumendo una sorgente immagine in $x = a$, e ponendo quella reale in $x = -a$, come si vede in figura. Il potenziale complesso del moto complessivo è

$$F = -\frac{Q}{2\pi}\left[\ln(z + a) + \ln(z - a)\right]$$

e

$$\bar{F} = -\frac{Q}{2\pi}\left[\ln(\bar{z} + a) + \ln(\bar{z} - a)\right]$$

e troviamo allora

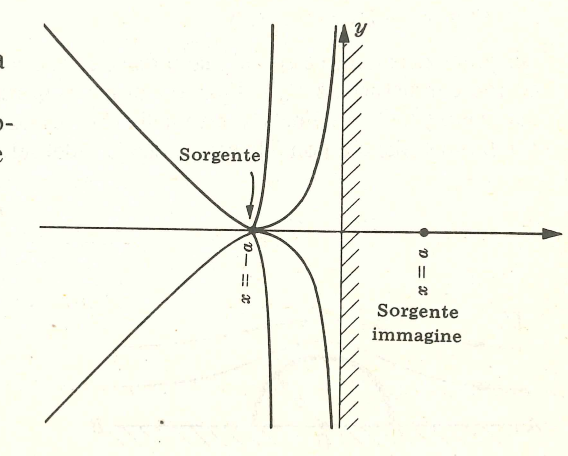


Fig. 6-26

$$V^2 = \frac{dF}{dz}\cdot\frac{d\bar{F}}{d\bar{z}} = \frac{Q^2}{4\pi^2}\left[\frac{1}{(z+a)}+\frac{1}{(z-a)}\right]\left[\frac{1}{(\bar{z}+a)}+\frac{1}{(\bar{z}-a)}\right]$$

che si può semplificare, essendo $z = x + iy$ e $\bar{z} = x - iy$:

$$V^2 = \frac{Q^2(x^2+y^2)}{\pi^2[(x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2) + a^4]}$$

e con l'equazione di Bernoulli $p^2/\rho + \frac{1}{2}V^2 = p_0/\rho$ abbiamo la differenza di pressione attraverso la parete nella forma $p - p_0 = -\frac{1}{2}V^2\rho$; la forza totale che agisce sulla parete, per unità di lunghezza della medesima e nel senso che esce dal foglio (positivo) è

$$\text{Forza} = \int_{-\infty}^{+\infty}(p-p_0)|_{x=0}\,dy = -\tfrac{1}{2}\rho\int_{-\infty}^{+\infty}V^2|_{x=0}\,dy = -\rho Q^2\frac{\rho Q^2}{2\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y^2\,dy}{(y^2+a^2)^2} = -\frac{\rho Q^2}{4\pi a}$$

Il risultato negativo ci dice che la forza complessiva è diretta verso sinistra: la parete viene risucchiata verso la sorgente.

6.3. Rivedere il problema 6.2, quando la sorgente viene rimpiazzata da un pozzo.

Il potenziale complesso è lo stesso, solo che adesso Q è un numero negativo; però, per trovare la forza, Q appare al quadrato, e quindi il suo segno non ha importanza. Concludiamo allora che la forza totale sulla parete rimane la stessa, e detta parete viene sempre richiamata sia verso il pozzo che verso la sorgente.

Il risultato potrebbe sorprendere, ma bisogna pensare che in entrambi i casi l'aumento di velocità presso la parete provoca una diminuzione di pressione, e quindi il risultato è lo stesso.

6.4. Il vento che scende da una collina scorre su un rilievo dalla forma di settore circolare di raggio b, e prosegue il suo cammino verso la pianura. Tracciare l'andamento della corrente, trovando i valori di ϕ e di ψ; l'andamento è quello di fig. 6-27.

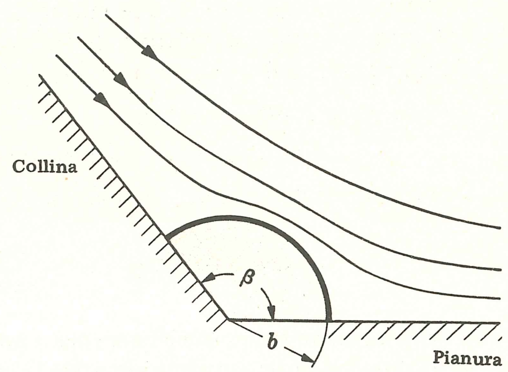


Fig. 6-27

Partiamo dalla corrente che scorre su un cilindro circolare, e la applichiamo ad un angolo con la trasformazione della (*6.29*).

Se nel piano ζ, riferendoci alla fig. 6-28,

$$F(\zeta) = -U_0(\zeta + a^2/\zeta)$$

allora dalla $\zeta = z^\alpha$ abbiamo

$$F(z) = -U_0(z^\alpha + a^2/z^\alpha)$$

per potenziale complesso nel piano fisico z. Ricaviamo α dalla $\pi/\alpha = \beta$. Noteremo che la velocità di corrente indisturbata V_0 nel piano z non è uniforme, ma varia con r e θ. U_0 non si applica direttamente dal piano ζ nello z come avveniva nella trasformazione del profilo Joukowski. E inoltre, il raggio a del cerchio nel piano ζ non è lo stesso raggio b del settore nel piano z.

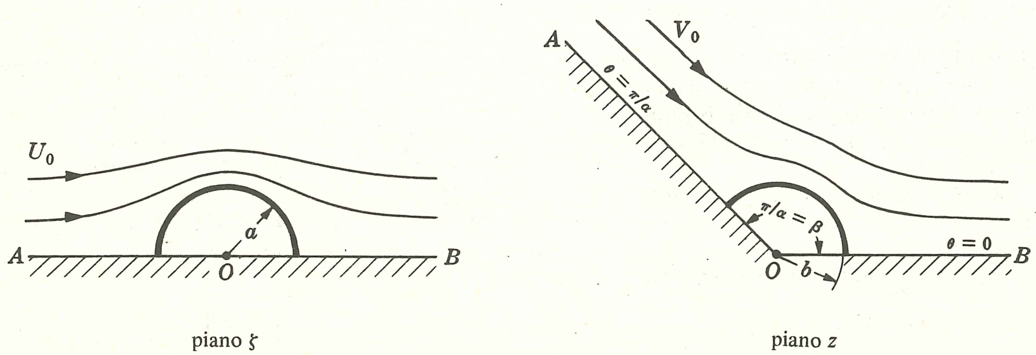


Fig. 6-28

E' allora
$$z^\alpha = r^\alpha e^{\alpha i\theta} = r^\alpha(\cos\alpha\theta + i\sin\alpha\theta)$$

e
$$F = -U_0[r^\alpha(\cos\alpha\theta + i\sin\alpha\theta) + (a^2/r^\alpha)(\cos\alpha\theta - i\sin\alpha\theta)]$$

così che
$$\phi = \operatorname{Re} F = -U_0 r^\alpha[\cos\alpha\theta + a^2 r^{-2\alpha}\cos\alpha\theta]$$
$$\psi = \operatorname{Im} F = -U_0 r^\alpha[\sin\alpha\theta - a^2 r^{-2\alpha}\sin\alpha\theta]$$

Possiamo avere l'andamento della velocità di corrente indisturbata trovando con la $-\partial\phi/\partial r$ la velocità radiale v_r:

$$v_r = \alpha U_0 r^{\alpha-1}[\cos\alpha\theta - a^2 r^{-2\alpha}\cos\alpha\theta]$$

così che per $\theta = \pi/\alpha$ (lungo la parete) abbiamo

$$v_r|_{\theta=\pi/2} = -\alpha U_0[r^{\alpha-1} - a^2 r^{-(1+\alpha)}]$$

Se r è grande e $\alpha > 1$, $v_r|_{\theta=\pi/2}$ diventa grande ed è pari a circa $-\alpha U_0 r^{(\alpha-1)}$. Il segno negativo indica un moto dall'infinito, diretto verso l'interno.

Il raggio b può essere messo in relazione ad a, e b si ottiene ponendo $v_r = 0$. Così

$$1 - a^2 r^{-2\alpha}|_{r=b} = 0 \quad \text{da cui} \quad b = a^{1/\alpha}$$

6.5. La trasformazione

$$z = C(\zeta + \lambda\zeta^{-1}), \quad 0 \leq \lambda \leq 1, \ 0 \leq C$$

conduce da un cerchio di raggio unitario nel piano ζ all'ellisse nel piano z di fig. 6-29.

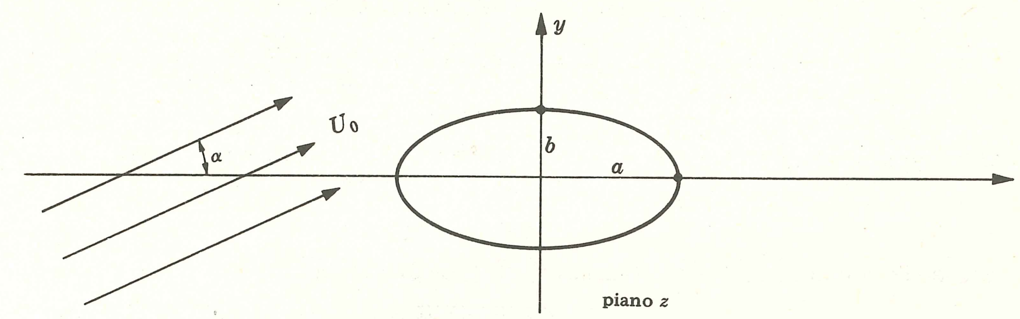


Fig. 6-29

(*a*) Applicando questa trasformazione trovare il potenziale complesso $F(z)$ nel caso di un moto permanente sul cilindro ellittico di semiassi a e b come in fig. 6-29. La velocità indisturbata all'infinito è U_0, e forma un angolo α rispetto alle x.

(*b*) Sia $z = k\cosh\gamma$, in cui k è una costante reale e $\gamma = \xi + i\eta$. Allora le linee a ξ costante costituiscono una famiglia di ellissi nel piano z, mentre quelle ad η costante sono una famiglia di iperboli dallo stesso fuoco, e ortogonali alle ellissi suddette. Il reticolo a ξ ed η costanti che ne risulta nel piano z ci dà un sistema di coordinate ellittiche. Riferendosi a queste ultime e indicando con V la grandezza della velocità del fluido sulla superficie del cilindro ellittico già visto, si esprima V in funzione di η per $\alpha = 0$.

(*a*) Esaminiamo prima la trasformazione $\zeta - z$: $z = C(\zeta + \lambda\zeta^{-1})$. Sia $\zeta = e^{i\theta}$ per un cerchio di raggio unitario, e $z = x + iy$. Allora

$$z = C(e^{i\theta} + \lambda e^{-i\theta}) = C(1+\lambda)\cos\theta + iC(1-\lambda)\sin\theta$$

e $x = C(1+\lambda)\cos\theta$, $y = C(1-\lambda)\sin\theta$ così che $\dfrac{x^2}{C^2(1+\lambda)^2} + \dfrac{y^2}{C^2(1+\lambda)^2} = 1$. Quindi

$$a = C(1+\lambda), \quad b = C(1-\lambda)\,; \qquad C = (a+b)/2, \quad 4c^2\lambda = a^2 - b^2 \qquad (1)$$

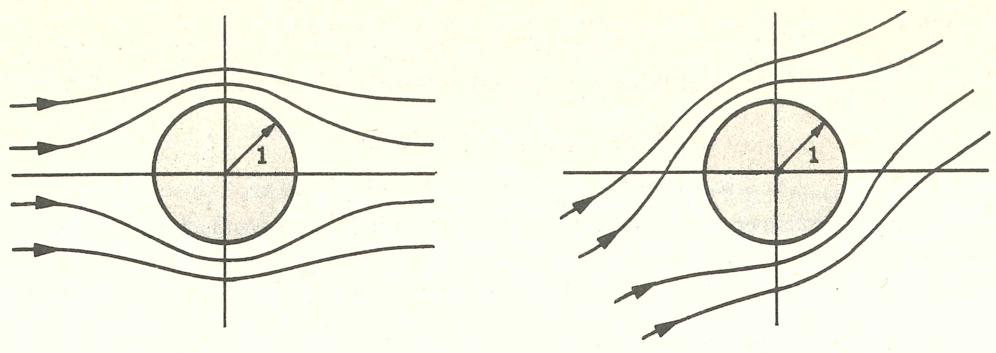


Fig. 6-30

Ora, per la corrente sul cerchio unitario nel piano γ di fig. 6-30,

$$F(\gamma) = A(\gamma + \gamma^{-1})$$

Allora $\zeta = \gamma e^{i\alpha}$, così che $F(\zeta) = A(\zeta e^{-i\alpha} + \zeta^{-1} e^{i\alpha})$

Dalla trasformazione assegnata $z = C(\zeta + \lambda\zeta^{-1})$ abbiamo

$$\zeta = \frac{1}{2C}(z \pm \sqrt{z^2 - 4C^2\lambda})$$

Qui prendiamo il segno (+), così che il dominio al di fuori del cerchio nel piano ζ (fig. 6-30) sia trasformato nel dominio che circonda l'ellisse nel piano z. Allora

$$F(z) = A\left[\frac{e^{-i\alpha}}{2C}(z + \sqrt{z^2 - 4C^2\lambda}) + \frac{2Ce^{i\alpha}}{(z + \sqrt{z^2 - 4C^2\lambda})}\right] \qquad (2)$$

Ora $\left.\frac{dF}{dz}\right|_{z\to\infty} = \frac{A}{C}e^{-i\alpha}$ ma $\left.-\frac{dF}{dz}\right|_{z\to\infty} = (u - iv)\Big|_{z\to\infty} = U_0 e^{-i\alpha}$; quindi

$$A/C = -U_0 \qquad (3)$$

Usando i valori di C, λ, A ottenuti dalle (*1*) e (*3*), la (*2*) diventa

$$F(z) = -\tfrac{1}{2}U_0(a+b)\left\{\frac{[z + \sqrt{z^2 - (a^2 - b^2)}]e^{-i\alpha}}{a+b} + \frac{[z - \sqrt{z^2 - (a^2 - b^2)}]e^{i\alpha}}{a-b}\right\} \qquad (4)$$

(*b*) Abbiamo $z = k \cosh\gamma$, $\gamma = \xi + i\eta$ e possiamo scrivere

$$x + iy = k\cosh(\xi + i\eta) = k(\cosh\xi\cos\eta + i\sinh\xi\sin\eta)$$

Quindi $\frac{x^2}{k^2\cosh^2\xi} + \frac{y^2}{k^2\sinh^2\xi} = 1, \qquad \frac{x^2}{k^2\cos^2\eta} - \frac{y^2}{k^2\sin^2\eta} = 1$

Rappresenti $\xi = \xi_0$ l'ellisse di semiassi a e b nel piano z; allora $k\cosh\xi_0 = a$ e $k\sinh\xi_0 = b$, ovvero

$$\left.\begin{aligned} k^2 = a^2 - b^2, \quad \tanh\xi_0 = b/a \\ \frac{e^{2\xi_0}}{(a+b)^2} = \frac{e^{-2\xi_0}}{(a-b)^2} = \frac{1}{k^2} \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

L'equazione (*4*) diventa (con $\alpha = 0$)

$$F(\gamma) = -\tfrac{1}{2}U_0(a+b)\sqrt{a^2-b^2}\left(\frac{e^{\gamma}}{a+b} + \frac{e^{-\gamma}}{a-b}\right)$$

$$\bar{F}(\bar{\gamma}) = -\tfrac{1}{2}U_0(a+b)\sqrt{a^2-b^2}\left(\frac{e^{\bar{\gamma}}}{a+b} + \frac{e^{-\bar{\gamma}}}{a-b}\right)$$

$$(V_\gamma^2)_{\xi=\xi_0} = \frac{dF}{d\gamma}\cdot\frac{d\bar{F}}{d\bar{\gamma}} = \frac{U_0^2}{4}(a+b)^2(a^2-b^2)\left\{\frac{e^{2\xi}}{(a+b)^2} + \frac{e^{-2\xi}}{(a-b)^2} - \frac{e^{2i\eta}}{(a^2-b^2)} - \frac{e^{-2i\eta}}{(a^2-b^2)}\right\}$$

La (*5*) ci dà

$$V_\gamma^2|_{\xi=\xi_0} = \tfrac{1}{4}U_0^2(a+b)^2\{2 - 2\cos 2\eta\} = U^2(a+b)^2\sin^2\eta$$

$$V^2 = V_z^2|_{\xi=\xi_0} = \frac{V_\gamma^2|_{\xi=\xi_0}}{|dz/d\gamma|^2_{\xi=\xi_0}} = U_0^2\left(\frac{a+b}{a-b}\right)\left(\frac{\sin^2\eta}{\sin^2\eta + \sinh^2\xi_0}\right)$$

in cui $\xi_0 = \tanh^{-1} b/a$.

6.6. Trovare il potenziale complesso della sorgente collocata nel piano medio del condotto bidimensionale di fig. 6-31.

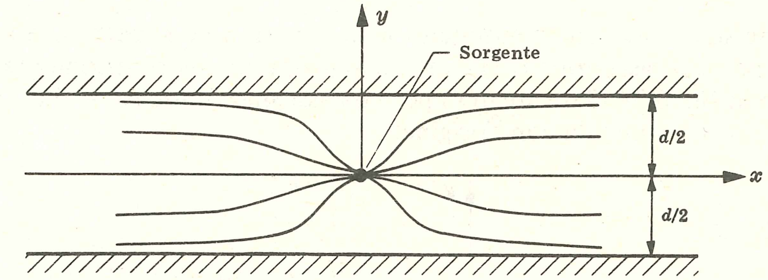


Fig. 6-31

Con il metodo delle immagini possiamo comporre un insieme infinito, come si vede in fig. 6-32:

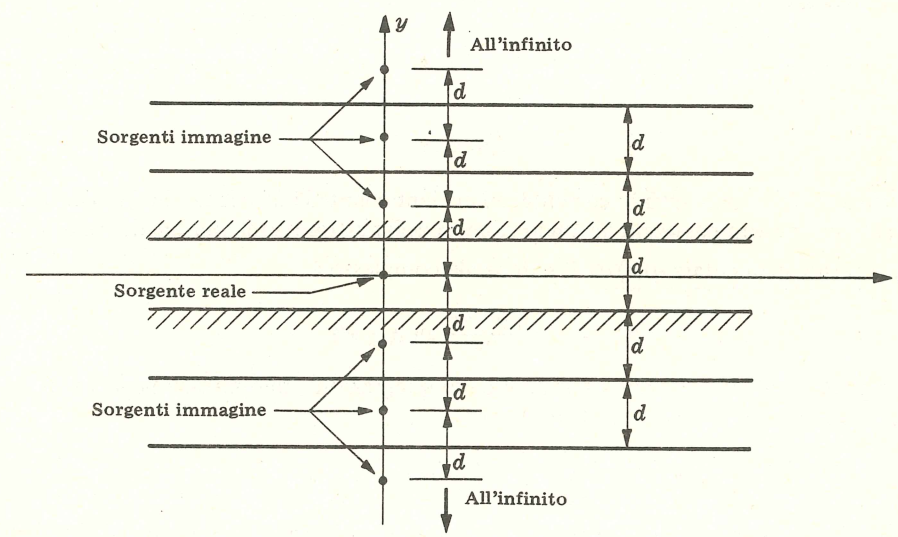


Fig. 6-32

Allora il potenziale complesso si trova sommando tutte le immagini:

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{Q}{2\pi}\ln(z + ind) + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{Q}{2\pi}\ln(z - ind) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} -\frac{Q}{2\pi}\ln(z + ind) = -\frac{Q}{2\pi}\ln\left(\sinh\frac{\pi z}{d}\right)$$

Calcolando F per $-d/2 < y < d/2$, abbiamo la corrente tra le pareti, in corrispondenza a $\pm d/2$.

Possiamo trovare ϕ e ψ come

$$\phi = -\frac{Q}{2\pi}\ln\left(\sinh\frac{\pi x}{d}\cos\frac{\pi y}{d}\right), \qquad \psi = -\frac{Q}{2\pi}\ln\left(\cosh\frac{\pi x}{d}\sin\frac{\pi y}{d}\right)$$

6.7. Un cilindro dal diametro di 25,4 mm ruota come in fig. 6-33 a 3600 giri/min in aria standard, che scorre su di esso a 30 m/s. Trovare la portanza, per unità di lunghezza, che si sviluppa sul cilindro.

Usiamo la $L = -\rho U_0 \Gamma$, dove si può stimare Γ assumendo

$$\Gamma \;=\; \oint \mathbf{V}\cdot d\mathbf{l} \;=\; \int_0^{2\pi} -(r\Omega)(r\,d\theta) \;=\; -2\pi r^2 \Omega$$

$-2\pi(0{,}0127\ \text{m})^2\,(3600 \times 2\pi/60\ \text{rad/s}) = -0{,}375\ \text{m}^2/\text{s}$

Così $L = -\rho U_0 \Gamma = -(1{,}182\ \text{kg/m}^3)\,(30\ \text{m/s})\,(-0{,}375\ \text{m}^2/\text{s}) =$
$= 13{,}35\ \text{N/m} = 1{,}37\ \text{kg/m}.$

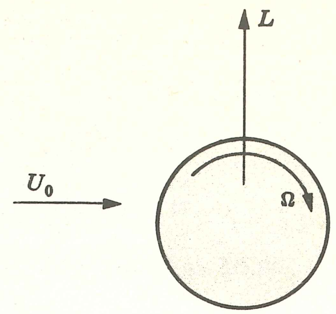


Fig. 6-33

6.8. La corrente su di un cilindro bidimensionale, simmetrico rispetto alle x, si può determinare per una qualsiasi forma $f(x)$ con una appropriata distribuzione $q(x)$ di sorgenti lungo le x, come in fig. 6-34. Trovare $q(x)$ per una assegnata forma $y = f(x)$. Assumiamo che il becco del profilo coincida con l'origine.

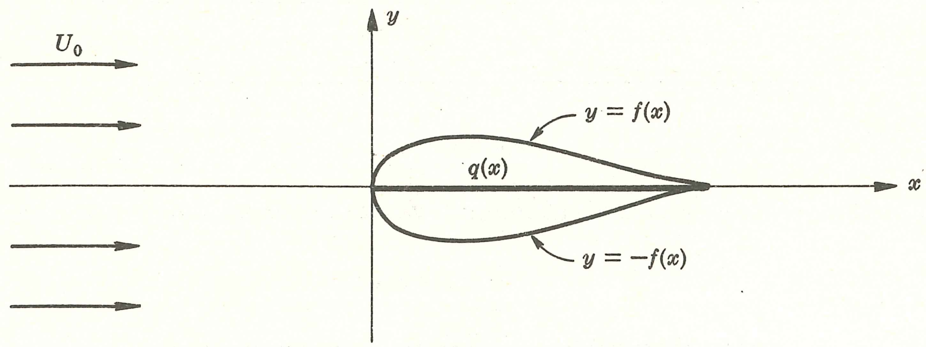


Fig. 6-34

La superficie $\pm f(x)$ è una linea di corrente, ed evidentemente la distribuzione $q(x)$ deve cambiar segno lungo l'asse x, e nessun passaggio di fluido si potrà avere attraverso il confine del profilo, $\pm f(x)$.

Per una sorgente elementare $q(x)\,dx$ il potenziale complesso è

$$dF \;=\; -\frac{q(x')\,dx'}{2\pi}\ln(z - x')$$

nel quale gli apici sulle x indicano una variabile di integrazione, in opposizione alla x di $z = x + iy$, posizione rispetto alla quale si calcola F. Allora

$$F \;=\; \int_0^L \;-\; \frac{q(x')}{2\pi}\ln(z - x')\,dx'$$

Ma la parte immaginaria di F è ψ, e $\psi\,(x, y) =$ costante arbitraria $= 0$ è uguale ad $y = f\,(x)$. Prendendo la parte immaginaria di F, abbiamo

$$\text{Im}\,F \;=\; \psi \;=\; \int_0^L \;-\; \frac{q(x')}{2\pi}\tan^{-1}\frac{y}{x - x'}\,dx'$$

e sulla superficie $y = f\,(x)$ e $\psi = 0$, così che

$$0 \;=\; \int_0^L \;-\; \frac{q(x')}{2\pi}\tan^{-1}\frac{f(x)}{x - x'}\,dx'$$

equazione integrale da risolvere rispetto a $q\,(x)$. In generale la soluzione non è semplice. La corrente attorno all'ovale di Rankine (fig. 6-10) è stata un esempio particolarmente facile di questo metodo. Si tratta comunque di una tecnica molto utile per determinare le correnti attorno a fusoliere di aerei e chiglie di navi.

PROBLEMI SUPPLEMENTARI

6.9. Può un tubo vorticoso terminare nel fluido, o deve piuttosto richiudersi ad anello?

6.10. Come si può definire un filamento, o anche solo un tubo vorticoso in un tornado? Supporre che il nucleo sia a sezione uniforme.

6.11. E' possibile definire un filamento vorticoso in una corrente con forze di taglio viscose? E un tubo vorticoso? A cosa somigliano le linee vorticose in un moto di Poiseuille?

6.12. Per quale ragione sul dorso di un'ala l'aria scorre verso l'interno, in direzione del centro, mentre sul ventre scorre verso l'esterno, in direzione delle estremità alari?

6.13. Una capanna semisferica, caratteristica dell'artico, è soggetta alla portanza generata dal vento che soffia sopra di essa. Se quest'ultimo ha una velocità di 128 km/h e la temperatura dell'aria è di $-18\ ^\circ\text{C}$, quale sarà la portanza per unità di lunghezza che agisce sulla capanna dal diametro di 3 m di fig. 6-35?

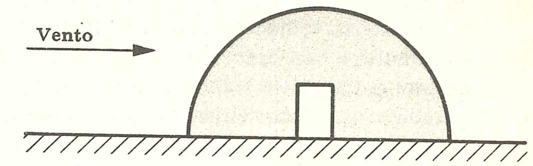


Fig. 6-35

6.14. Per trovare nel precedente problema quanto vale la portanza se la porta della capanna resta aperta, è importante sapere dove è collocata la porta stessa? A cosa è dovuta la pressione all'interno della capanna?

6.15. Discutere il moto $z = C\cosh F$. Dimostrare che

$$x \;=\; C\cosh\phi\,\cos\psi, \qquad y \;=\; C\sinh\phi\,\sin\psi$$

e le linee di corrente ($\psi =$ costante) sono delle iperboli con il fuoco in comune; dimostrare anche che questo andamento potrebbe rappresentare il moto attraverso un'apertura.

6.16. Calcolare la forza esercitata su di una parete da un dipolo di intensità m, collocato ad una distanza a dalla parete stessa. Assumere quest'ultima parallela alle x, e lo stesso per l'asse del dipolo.

6.17. Che forza avremo nel problema precedente, se il dipolo si trova inclinato rispetto alla parete di un angolo α?

6.18. Cosa succederà nei problemi 6.16 e 6.17 assumendo l'intensità del dipolo pari a $-m$? La forza che agisce sulla parete cambierà segno?

6.19. Discutere il moto $F = z^2 - 1$.

6.20. Trovare F, ϕ, ψ e tracciare le linee di corrente per il moto dovuto a una sorgente, posta sulla parete interna di un canale largo d come in fig. 6-36. (*Traccia:* costruire una serie infinita di immagini, e fare la sommatoria.)

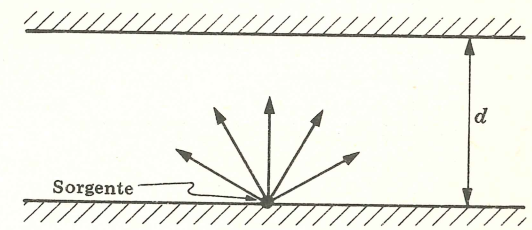


Fig. 6-36

6.21. Discutere il moto $F = Az^2$.

6.22. Discutere il moto $z^2 = F^3$.

6.23. Trovare F, e tracciare le linee di corrente per il moto in un canale, con due sorgenti collocate una di fronte all'altra come in fig. 6-37.

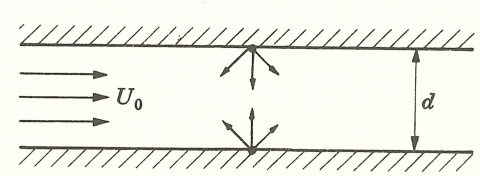


Fig. 6-37

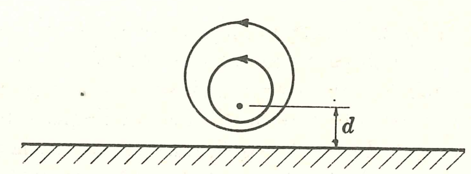


Fig. 6-38

6.24. Un vortice potenziale è collocato ad una distanza d da una parete come in fig. 6-38. Discutere il moto.

6.25. Discutere il moto che si stabilizza attorno a un cilindro circolare in prossimità di una parete come in fig. 6-39; assumere $d \gg D$.

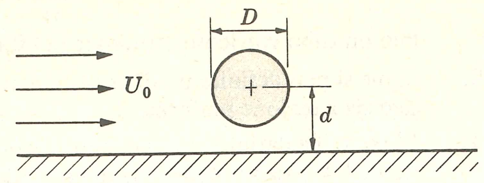


Fig. 6-39

6.26. Discutere il moto del problema 6-25 quando il cilindro ruota con velocità angolare Ω attorno al proprio asse.

6.27. Trovare la forza che agisce sul cilindro nel problema 6.26.

6.28. In un cartoncino leggero viene infilato uno spillo, che a sua volta viene fatto passare nel foro di un rocchetto da filati come in fig. 6-40. Se soffiamo leggermente nel rocchetto vediamo che il disco di cartone viene trattenuto, e non cade. Perché? In effetti l'aria viene deviata radialmente, e il moto tra cartone e rocchetto è simile a quello che emana da una sorgente potenziale. Quale sarà la distribuzione di pressione lungo la superficie del disco? E' questo che spiega la portanza in atto? Se soffiamo molto forte il disco cade. Perché? Dobbiamo pensare alla quantità di moto dell'aria che irrompe attraverso il foro del rocchetto? Se comincia a scorrere radialmente, essa deve cambiare direzione: ci aiuta questo a spiegare?

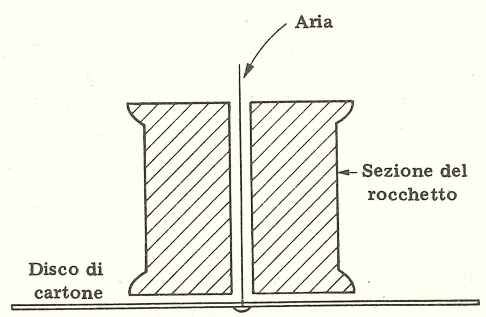


Fig. 6-40

6.29. Una sorgente è collocata in posizione z_1, un pozzo in posizione z_2. Assumendo delle intensità generiche, quanto valgono F, ϕ, ψ?

6.30. Tracciare le linee di corrente per una sorgente e un pozzo di uguale intensità, giacenti su di una linea $z = e^{i\alpha}$ e ad uguale distanza a dall'origine, immersi in un moto uniforme lungo l'asse x.

6.31. Una sorgente è collocata all'interno di un gomito ad angolo retto, come in fig. 6-41. Qual è il potenziale complesso? E la velocità complessa?

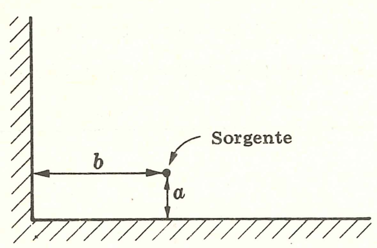


Fig. 6-41

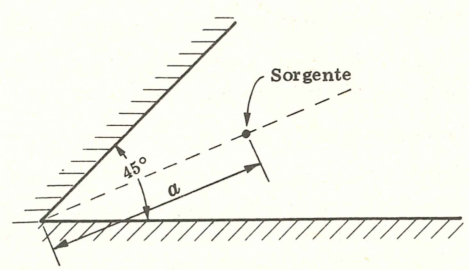


Fig. 6-42

6.32. Una sorgente è collocata sulla bisettrice di un gomito a 45°, a distanza a dall'origine. Trovare F e descrivere il moto, riferendosi alla fig. 6-42.

6.33. Un tornado di circolazione Γ ha un nucleo solido di diametro a. Calcolare la distribuzione di pressione che si stabilisce in esso. Può questa bassa pressione contribuire agli effetti disastrosi del tornado?

6.34. In fig. 6-43 vediamo lo schema di un vortice oceanico. La pressione lungo una linea qualsiasi A-A diminuisce dal valore idrostatico $\rho g h$ sui grandi raggi, a zero (manometrica) nel punto P. Trovare l'equazione della superficie libera del vortice, usando la teoria del vortice potenziale. Cosa succede al centro, in profondità? Il vortice si ferma, o continua fino al fondo dell'oceano? Come si spiega che gli oggetti che finiscono in un vortice tendono ad essere risucchiati?

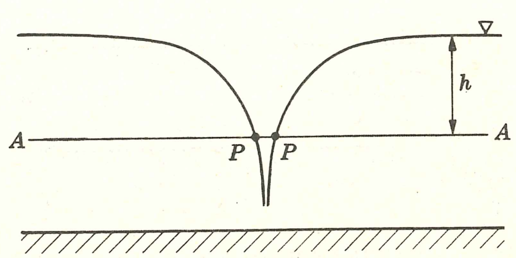


Fig. 6-43

NOMENCLATURA USATA NEL CAPITOLO 6

F	=	potenziale complesso
Im	=	parte immaginaria
L	=	portanza
M	=	momento
p	=	pressione
p_0	=	pressione di ristagno
p_∞	=	pressione di corrente indisturbata, dove $V = U_0$
Q	=	portata in volume
Re	=	parte reale
U_0	=	velocità di corrente indisturbata
u	=	componente della velocità secondo le x
V	=	vettore velocità
v	=	componente della velocità secondo le y
v_r	=	componente della velocità secondo r
v_θ	=	componente della velocità secondo θ
w	=	componente della velocità secondo z
X	=	componente della forza secondo le x
Y	=	componente della forza secondo le y
z	=	$(x + iy)$ = variabile complessa
Γ	=	circolazione
ρ	=	densità
ϕ	=	potenziale di velocità
ψ	=	funzione di corrente; potenziale di gravità
Ω	=	vettore velocità angolare
ω	=	vettore vorticità, o rotazione
$(\bar{\ })$	=	indica il numero complesso coniugato

CAPITOLO 7

Moto compressibile monodimensionale

7.1 INTRODUZIONE

Molte correnti ammettono nella realtà la schematizzazione di "senza attrito" e "incompressibile" (capitolo 6). Per altre invece è importante la viscosità (capitolo 5). Considereremo qui dei moti monodimensionali per i quali le variazioni di densità sono della massima importanza per individuare la natura della corrente. Questo modello fisico, anche se sembra piuttosto limitato, approssima bene la realtà di molte correnti.

In questo capitolo studieremo solo dei moti interni. Applicando l'ipotesi monodimensionale diamo per scontato che tutte le grandezze interessate (pressione, velocità, temperatura, ecc.) siano uniformi in qualsiasi sezione del condotto.[1]

I moti interni (come quelli nei tubi, nei canali, nei condotti) possono portare a variazioni delle proprietà lungo il cammino, in dipendenza da variazioni di sezione, di scambio di calore, di attrito: tutte eventualità presenti nelle correnti reali. Studieremo comunque questi effetti uno alla volta, e questo per due ragioni: primo, per diverse correnti solo un effetto è veramente importante; secondo, in questo modo si capisce meglio l'influenza di questi effetti in moti più generali.

(*a*) Approssimazione del gas ideale.

L'approssimazione del gas ideale vale per gas a media e bassa densità: ricaviamo con essa delle relazioni tra proprietà, molto utili per impostare il modello matematico complessivo. Se per esempio assumiamo che il fluido sia un gas ideale, abbiamo

$$pv = RT \qquad (7.1)$$

in cui p è la pressione assoluta, v il volume specifico, R la costante dei gas, T la temperatura assoluta. Se inoltre si assume che i calori specifici a volume e pressione costante non variano con la temperatura, avremo tra gli stati 1 e 2 queste altre relazioni tra le rispettive proprietà

$$u_2 - u_1 = c_v(T_2 - T_1) \qquad (7.2)$$

$$h_2 - h_1 = c_p(T_2 - T_1) \qquad (7.3)$$

in cui u è l'energia interna specifica, h l'entalpia specifica, c_v e c_p rispettivamente i calori specifici a volume e a pressione costante. Se inoltre il moto è per ipotesi senza attrito e adiabatico (e perciò isentropico) e segue l'equazione di stato dei gas ideali, la trasformazione è completamente descritta dalla

$$pv^k = \text{costante} \qquad (7.4)$$

nella quale k è il rapporto c_p/c_v tra i calori specifici.

[1] Nel senso stretto del termine si definisce moto unidimensionale, o monodimensionale, quello che si può descrivere dando una sola coordinata spaziale. E' il caso del moto a regime nelle tubazioni. Qui ci occupiamo comunque solo dei moti che presentano condizioni uniformi ad ogni sezione del condotto.

(*b*) Propagazione di una perturbazione infinitesima.

Una perturbazione si propaga attraverso un fluido ad una velocità ben definita, che dipende dalle proprietà del fluido stesso. Questa velocità di propagazione dipende dall'entità del disturbo; se esso è molto piccolo, la velocità con cui si propaga si chiama velocità del suono, o velocità acustica, che è di per sé una proprietà del fluido, molto importante nel caso del moto compressibile.

Per trovare la velocità del suono consideriamo un fluido che si sposta nel lungo tubo di fig. 7-1. Parte una perturbazione infinitesima, e un fronte d'onda si sposta con velocità a; fissiamo sull'onda stessa il nostro sistema di riferimento, così che il fluido indisturbato si muova con velocità a rispetto all'onda.

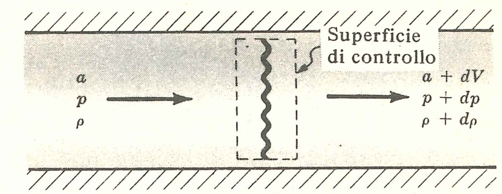


Fig. 7-1. Propagazione di un'onda sonora

L'equazione della quantità di moto per il volume di controllo di sezione A che vediamo in figura sarà

$$A[p - (p + dp)] = \rho Aa[(a + dV) - a]$$

che ci dà

$$-dp = \rho a\, dV$$

in cui ρ è la densità, a la velocità dell'onda sonora, detta anche velocità sonica. L'equazione di continuità del volume di controllo è

$$\rho Aa = (\rho + d\rho)(a + dV)A$$

Semplificando, e trascurando i termini di ordine superiore, abbiamo

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dV}{a}$$

E combinando le equazioni della quantità di moto e di continuità,

$$dp/d\rho = a^2$$

Equazione spesso scritta

$$(\partial p/\partial \rho)_s = a^2 \qquad (7.5)$$

perché il disturbo è infinitesimo, e dunque il processo è reversibile e adiabatico e quindi isentropico, come indicato dall'indice s nella derivata.

Per un gas ideale possiamo usare l'equazione (*7.4*) e mostrare che

$$a^2 = kRT \qquad (7.6)$$

(*c*) Il cono di Mach.

La piccola perturbazione localizzata in un punto di un fluido stazionario si propaga radialmente in tutte le direzioni, e i fronti d'onda formano diverse sfere concentriche come in fig. 7-2. Se adesso la sorgente della perturbazione si muove con velocità V inferiore ad a, avremo ancora delle sfere che in tempi differenti rappresentano i fronti d'onda, ma esse non sono più concentriche, come si vede in fig. 7-3. Nel caso di $V > a$, cioè di velocità del disturbo maggiore di quella del suono, si forma una superficie conica da una parte della quale il moto resta indisturbato, dall'altra invece risente dell'effetto dell'onda. Il

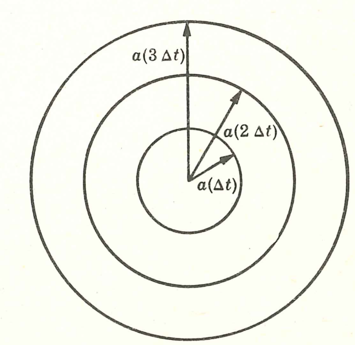


Fig. 7-2. Perturbazione infinitesima stazionaria

semiangolo del cono è $\alpha = \sin^{-1}(a/V) = \sin^{-1}(1/M)$,come si vede in fig. 7-4. Qui M è il numero di Mach V/a.

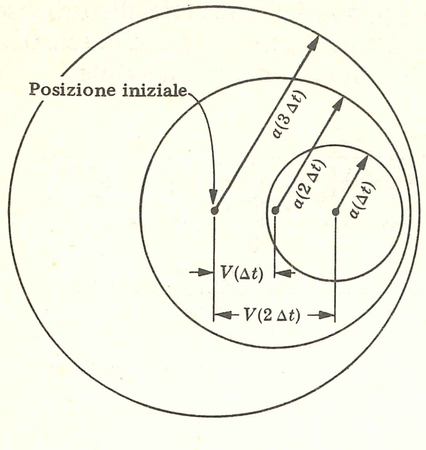


Fig. 7-3. Perturbazione infinitesima con $V < a$.

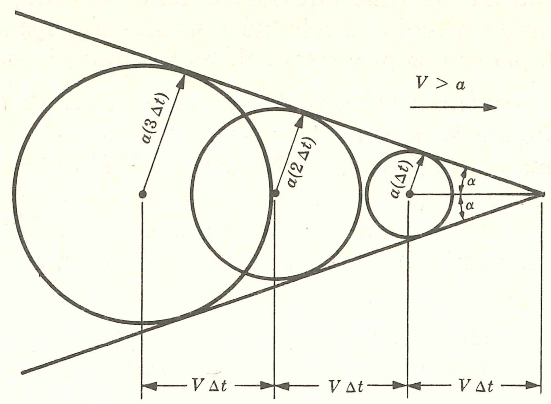


Fig. 7-4. Perturbazione infinitesima con $V > a$. $\alpha = \sin^{-1}(1/M)$.

Possiamo immaginare che le perturbazioni di fig. 7-3 e fig. 7-4 siano stazionarie, e che il fluido sia invece dotato di velocità V da destra verso sinistra; otterremo la stessa rappresentazione. Vediamo dalle figure la differenza fondamentale tra moto subsonico e moto supersonico: nel subsonico si ha $M < 1$, e una perturbazione infinitesima si risente in tutto il campo di corrente. Nel supersonico è $M > 1$, e il disturbo si sente solo in una certa zona. Questo ci indica alcune interessanti ed importanti differenze nell'andamento dei moti subsonici e supersonici.

7.2 MOTO ISENTROPICO

Diverse correnti possono essere descritte con ragionevole accuratezza, assumendo che esse sono isentropiche: deriva da questa condizione che esse sono senza attrito e adiabatiche, senza discontinuità nelle proprietà del fluido. Degli esempi sono (1) i moti esterni in regioni con piccoli gradienti di velocità e di temperatura, (2) i moti interni come negli ugelli e nei diffusori, dove la variazione di sezione è causa primaria per la variazione delle condizioni di moto.

(*a*) Effetti della variazione di sezione.

L'equazione dell'energia nel caso del moto adiabatico, monodimensionale, permanente di un gas ideale, senza sviluppo di lavoro, è

$$V^2/2 + c_p T = \text{costante}$$

Usando l'equazione (*7.6*) per la velocità del suono, abbiamo

$$V^2/2 + \frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho} = \text{costante}$$

La differenziazione ci dà

$$V\,dV + a^2\frac{d\rho}{\rho} = 0 \qquad (7.7)$$

Possiamo differenziare l'equazione di continuità del moto monodimensionale permanente per ricavare la

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{dV}{V} = 0 \qquad (7.8)$$

Possiamo ora combinare le (*7.7*) e (*7.8*) per avere

$$\frac{dA}{A} = \frac{dV}{V}(M^2 - 1) \qquad (7.9)$$

La (*7.9*) ci reca dei risultati sorprendenti: per $M < 1$, un aumento di sezione genera una diminuzione in velocità; per $M > 1$ vale l'opposto, e un aumento di sezione produce un aumento di velocità. Constatiamo nuovamente l'importanza del numero di Mach come parametro per caratterizzare una corrente.

(*b*) Moto in un ugello convergente.

Studiamo il moto che si stabilisce in un passaggio convergente come quello di fig. 7-5. Accettiamo le ipotesi di gas ideale, di moto monodimensionale, permanente, adiabatico e senza attrito. L'equazione di continuità è

$$\dot{m} = A_2 V_2 / v_2 \qquad (7.10)$$

in cui $\dot{m}$ è la portata in massa e v il volume specifico $1/\rho$. L'equazione dell'energia, in funzione dell'entalpia h, è

$$\tfrac{1}{2}(V_2^2 - V_1^2) = h_1 - h_2 \qquad (7.11)$$

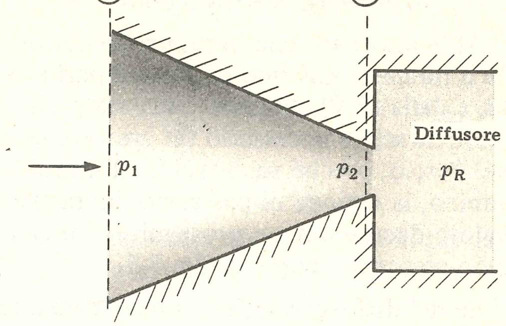


Fig. 7-5. Ugello convergente.

Se assumiamo che sia $V_1 \ll V_2$, la (*7.11*) si può scrivere così, usando le relazioni della trasformazione isentropica e delle varie proprietà:

$$V_2 = \left\{\frac{2k}{k-1}p_1 v_1[1 - (p_2/p_1)^{(k-1)/k}]\right\}^{1/2} \qquad (7.12)$$

Se combiniamo le (*7.10*) e (*7.12*) con la relazione isentropica $p_1 v_1^k = p_2 v_2^k$, otteniamo

$$\dot{m}/A_2 = \left\{\frac{2k}{k-1}\frac{p_1}{v_1}[(p_2/p_1)^{2/k} - (p_2/p_1)^{(k+1)/k}]\right\}^{1/2} \qquad (7.13)$$

Nel caso che le condizioni all'ingresso siano fisse, la variazione nella portata in massa si manifesta come unico risultato di una variazione di p_2, risultato che vediamo in fig. 7-6 nella veste di un grafico dell'equazione (*7.13*). Vediamo anche per l'effettiva portata in massa un diagramma di $\dot{m}$ in funzione di p_R/p_1, in cui p_R è la pressione nel diffusore.

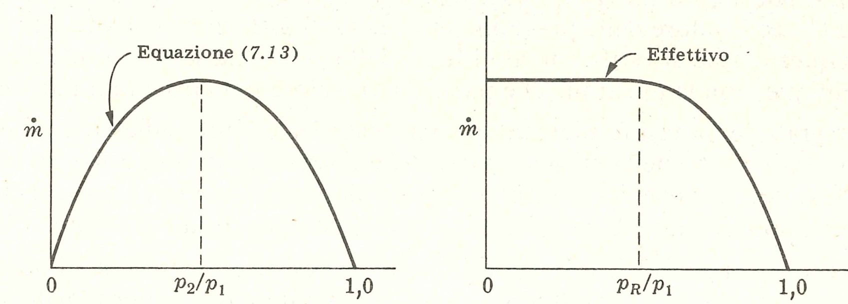


Fig. 7-6. Portata in massa in un ugello convergente.

Vi sono ovviamente delle discrepanze tra i risultati effettivi e quelli previsti dall'equazione: una buona coincidenza si può osservare a partire dal punto in cui $p_R/p_1 = 1{,}0$ fino al valore della pressione nel diffusore per il quale la portata in massa raggiunge un massimo. Vediamo che una ulteriore diminuzione di detta pressione di diffusore non produce variazioni nella portata in massa. Possiamo anche osservare sperimentalmente che la pressione in gola p_2 non va mai sotto il valore corrispondente alla massima portata in massa, valore minimo detto pressione critica p_c, che si può calcolare differenziando la (*7.13*) e ponendo il risultato uguale a zero. Otteniamo così

$$(p_2/p_1)_{\text{port. max.}} = p_c/p_1 = [2/(k+1)]^{k/(k-1)} \qquad (7.14)$$

Combinando le (*7.12*) e (*7.14*) si trova che il numero di Mach è uguale all'unità quando la pressione è critica. Risultati che comunque non sorprendono quando si pensa a quel che si è visto nel paragrafo precedente; per alzare il numero di Mach al di sopra dell'unità dovremmo aggiungere una prolunga a sezione divergente.

(*c*) **Ugello convergente-divergente.**

Abbiamo visto che in un ugello convergente il numero massimo di Mach è pari alla unità, e dalla (*7.9*) abbiamo constatato che per aumentarlo è necessario far crescere la sezione. Perciò, perché sia possibile il moto supersonico, la sezione di passaggio dovrà avere un valore decrescente, e proseguire in una a sezione crescente, come in fig. 7-7.

Se nel diffusore la pressione è leggermente ridotta (*a*, *b*) avremo moto da sinistra a destra: un moto tutto subsonico, con la parte convergente che funge da ugello e la divergente che funge da diffusore. Se nella camera di diffusione la pressione viene ancora ridotta (*c*) la pressione in gola raggiunge un minimo (critico) e ivi la velocità diventa uguale a quella del suono. Il moto nella sezione divergente è subsonico.

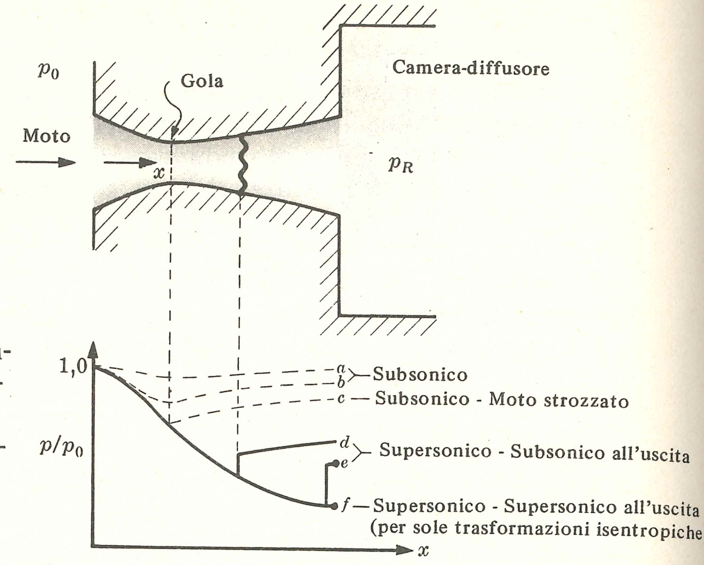


Fig. 7-7. Regime delle correnti in un ugello convergente-divergente

Se nella camera di diffusione la pressione viene ancora ridotta, (*d*, *e*), per una certa distanza il moto dopo la gola sarà supersonico. A questo segue una discontinuità nella pressione (urto normale) e il moto è supersonico nel resto del condotto, fino all'uscita; la condizione (*e*) è quella in cui l'onda d'urto si è spostata verso l'uscita dell'ugello.

In camera di diffusione abbiamo solo una pressione (*f*) per la quale un moto supersonico può essere isentropico. Se in detta camera la pressione è compresa tra *e* ed *f*, l'ugello si dice superespanso. Qui si verificano onde d'urto fuori dell'ugello, là dove la pressione si adatta da un valore più basso ad uno più alto. Se il valore della pressione in camera di diffusione è al di sotto di *f*, l'ugello è sottoespanso. In questo caso si verificano al di fuori dell'ugello una serie di onde di espansione e di onde d'urto oblique, con la pressione che passa da un valore più alto a uno più basso.

In questo paragrafo le ipotesi fondamentali sono: gas ideale, moto adiabatico, permanente, monodimensionale. Ipotesi che nella maggior parte delle correnti reali non sono del tutto soddisfatte. Il modello fornisce tuttavia dei risultati (velocità all'uscita o spinta, per dire) che per molte correnti risultano approssimati alla realtà con piccolissime percentuali di errore.

In certi casi tuttavia al progettista farebbe comodo di non sbagliare anche di pochi percento; bisogna allora tener conto del fatto che il moto non è veramente monodimensionale, e che esiste uno strato limite, e c'è trasmissione del calore, e che il gas non è ideale.

(*d*) **Equazioni isentropiche.**

Se il moto è monodimensionale, permanente, adiabatico, e il fluido è un gas ideale l'equazione dell'energia è

$$c_p T_1 + V_1^2/2 = c_p T_2 + V_2^2/2$$

Se scriviamo la velocità in funzione del numero di Mach e usiamo la $c_p - c_v = R$, detta equazione dell'energia diventa

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1+\frac{1}{2}(k-1)M_1^2}{1+\frac{1}{2}(k-1)M_2^2} \qquad (7.15)$$

E poi con la relazione isentropica tra pressione e temperatura per un gas ideale troviamo:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left[\frac{1+\frac{1}{2}(k-1)M_1^2}{1+\frac{1}{2}(k-1)M_2^2}\right]^{k/(k-1)} \qquad (7.16)$$

La portata in massa si può avere con la

$$\dot{m} = \rho A V$$

oppure, in funzione del numero di Mach,

$$\dot{m}/A = \sqrt{k/RT}\, pM \qquad (7.17)$$

7.3 URTI NORMALI

Abbiamo visto che in un ugello convergente-divergente esiste una discontinuità in pressione (densità e temperatura) quando la pressione in uscita è ristretta in un certo campo di valori. Questa discontinuità si chiama onda d'urto normale. In questo paragrafo: (1) dimostreremo che simile discontinuità può verificarsi, (2) svilupperemo le equazioni che descrivono la variazione delle grandezze caratteristiche attraverso un'onda d'urto.

Assumiamo che l'urto normale di fig. 7-8 si possa rappresentare con il seguente modello:

1. Area costante in tutta la zona d'urto. (La sezione del condotto può variare, ma non apprezzabilmente, lungo lo spessore della zona suddetta.)
2. Gas ideale
3. Moto permanente
4. Moto unidimensionale
5. Trasformazione adiabatica.

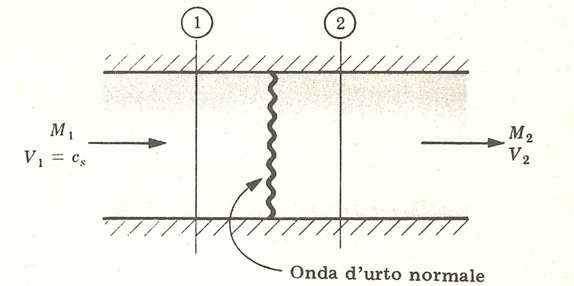


Fig. 7-8. Modello della corrente per l'urto normale.

E' importante rendersi conto che il moto attraverso un'onda d'urto è irreversibile, e non si possono quindi usare le equazioni di trasformazione isentropica. La forma delle equazioni dell'energia, della quantità di moto e della continuità applicate al volume di controllo diventano qui (vedi il paragrafo precedente)

Energia:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1+\frac{1}{2}(k-1)M_1^2}{1+\frac{1}{2}(k-1)M_2^2} \qquad (7.15)$$

Continuità:

$$p_2/p_1 = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}\,\frac{M_1}{M_2} \qquad (7.18)$$

Quantità di moto:

$$(p_1 - p_2)A = \dot{m}(V_2 - V_1)$$

che diventa

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1+kM_1^2}{1+kM_2^2} \qquad (7.19)$$

L'equazione di stato, combinata con l'espressione termodinamica della variazione di entropia, diventa

$$s_2 - s_1 = c_p \ln(T_2/T_1) - R \ln(p_2/p_1) \qquad (7.20)$$

Le equazioni (*7.15*), (*7.18*) e (*7.19*) riguardano tre incógnite (T_2, p_2, M_2) e si possono combinare per avere

$$M_2 = \left[\frac{M_1^2(k-1)+2}{2kM_1^2 - k + 1}\right]^{1/2} \qquad (7.21)$$

Le (*7.15*), (*7.19*) e (*7.21*) descrivono completamente le condizioni al di qua di un'onda d'urto, in funzione delle caratteristiche a monte.[2]

La domanda alla quale non abbiamo ancora risposto è: quando si verifica un'onda d'urto normale? Accettiamo l'ipotesi che tutte le condizioni del modello siano soddisfatte, tranne l'equazione della quantità di moto. Allora le (*7.15*), (*7.18*) e (*7.20*), cioè le equazioni dell'energia, della continuità e di stato, definiscono sul diagramma entalpia-entropia una curva che passa per lo stato iniziale 1, come in fig. 7-9: si tratta di una linea di Fanno.

Se invece tutte le condizioni del modello sono soddisfatte, tranne l'equazione dell'energia, abbiamo un'altra curva (linea di Rayleigh) sul diagramma entalpia-entropia.

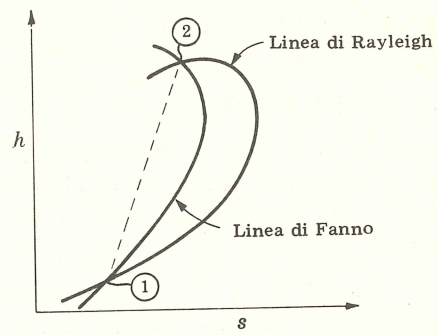


Fig. 7-9. Linee di Fanno e di Rayleigh.

Per soddisfare contemporaneamente tutte le condizioni del modello, anche le condizioni di equilibrio rappresentate dalle linee di Fanno e Rayleigh dovranno verificarsi contemporaneamente. Poiché le curve si intersecano in due punti, solo due stati soddisferanno alle condizioni assegnate, e presenteranno delle differenze nelle rispettive proprietà.

Così se il moto si trova nelle condizioni dello stato 1, potrà verificarsi una discontinuità, e il moto passerà nelle condizioni dello stato 2. Non sarà invece possibile che il moto passi dalle condizioni corrispondenti allo stato 2 a quelle dello stato 1, perché ciò comporterebbe una diminuzione di entropia, e questo non può essere a causa della seconda legge della termodinamica. Nell'intersezione della parte inferiore delle curve il moto è supersonico, in quella della parte superiore è subsonico. Così abbiamo dimostrato che una discontinuità può verificarsi se il moto è supersonico, mentre non può verificarsi se è subsonico.

7.4 MOTO ADIABATICO IN SEZIONE COSTANTE (LINEA DI FANNO)

Consideriamo il moto permanente, monodimensionale, adiabatico di un gas ideale in un condotto a sezione costante. Le equazioni che descrivono questo moto sono (l'indice 1 indica uno stato di riferimento a monte):

Energia: $h_1 + V_1^2/2 = h + V^2/2 = h_0$

in cui h_0 è l'entalpia di ristagno, definita dalla suddetta equazione.

Quantità di moto: $(p_1 - p)A - \tau_0 LC = A(\rho V^2 - \rho_1 V_1^2)$

in cui τ_0 = sforzo di taglio alla parete, L = lunghezza, C = distanza circonferenziale.

Continuità: $V_1/v_1 = V/v$ ovvero $V_1\rho_1 = V\rho$

Equazione di stato: $p_1 v_1/T_1 = pv/T$

Equazione caratteristica: $s - s_1 = c_v \ln(h/h_1) + R \ln(v/v_1)$

Combinando le equazioni dell'energia e della continuità otteniamo:

$$h = h_0 - \tfrac{1}{2}(V_1/v_1)^2 v^2$$

Combinando poi quest'ultima con l'equazione caratteristica ricaviamo l'andamento della linea di Fanno vista in fig. 7-9, la quale rappresenta le possibili condizioni prefissate a monte,

[2] Le variazioni delle proprietà nel passaggio attraverso un urto normale sono state tabulate numericamente in una forma conveniente ed il loro impiego elimina la necessità di fare dei conti usando le equazioni di cui sopra. Delle tavole d'urto si possono trovare nei rif. 1, 2 e 4 a pag. 148.

già indicate con l'indice 1. Osserviamo che su questa curva esiste un massimo per l'entropia, e questo ha un notevole significato. Se per esempio le condizioni 1 a monte sono collocate sul ramo basso della curva come in fig. 7-9 avremo, come si vede, un aumento dell'entalpia. Notare che l'entropia deve aumentare, per la seconda legge della termodinamica; e questo significa che se le condizioni del moto giungono fino a quelle corrispondenti alla massima entropia, esse non potranno cambiare ulteriormente. Sono queste le condizioni in cui il fluido viene a trovarsi all'uscita del condotto a sezione costante, quando il moto è "strozzato".

Combinando l'equazione $T\,ds$ (cioè la relazione caratteristica $T\,ds = dh - v\,dp$,) con la forma differenziale delle equazioni dell'energia e della continuità otteniamo

$$\frac{ds}{dh} = \frac{1}{T}\left(1 - \frac{1}{V^2}\frac{dp}{d\rho}\right)$$

Se poniamo uguale a zero questa relazione abbiamo le condizioni di moto strozzato all'uscita del tubo:

$$V^2 = dp/d\rho = (\partial p/\partial \rho)_s = a^2$$

ovvero

$$M = 1{,}0$$

Vediamo così che per gli effetti dell'attrito il fluido tende a un numero di Mach unitario sia in condizioni inizialmente subsoniche (curva superiore) che in condizioni supersoniche (curva inferiore).

Dalle equazioni possiamo determinare i cambiamenti di proprietà per il moto adiabatico monodimensionale del gas in un condotto a sezione costante. Riassumendo i risultati abbiamo

Proprietà	Moto supersonico	Moto subsonico
s	aumenta	aumenta
h	diminuisce	aumenta
T	diminuisce	aumenta
M	aumenta	diminuisce
V	aumenta	diminuisce
p	diminuisce	aumenta

7.5 MOTO SENZA ATTRITO IN SEZIONE COSTANTE, CON AUMENTO E DIMINUZIONE DI CALORE

Le equazioni del moto permanente monodimensionale e senza attrito in un condotto a sezione costante, in presenza di aumento o sottrazione di calore, se q è la quantità di calore trasmessa per unità di massa fluida in moto, sono

Energia: $h_1 + V_1^2/2 + q = h + V^2/2$

Quantità di moto: $p_1 - p = \rho V^2 - \rho_1 V_1^2$

Continuità: $\rho_1 V_1 = \rho V$

Equazione di stato: $p_1/\rho_1 T_1 = p/\rho T$

Combinando le equazioni della quantità di moto e della continuità, e ponendole in forma differenziale, abbiamo

$$(\partial p/\partial \rho)_s = a^2 = V^2$$

per massima entropia. Anche per questa corrente dunque il numero di Mach all'uscita in condizioni "strozzate", o di riduzione della sezione, è pari all'unità. Un riscaldamento del gas in moto provoca un aumento dell'entropia, e quindi sia nel moto subsonico che nel supersonico detto riscaldamento porta il numero di Mach verso l'unità.

In una zona della curva di Rayleigh possiamo vedere che quando al gas si aggiunge calore si viene ad avere una diminuzione di temperatura.

7.6 MOTO ISOTERMO CON ATTRITO

Vi sono delle correnti che sono approssimativamente isoterme, come per esempio il moto del gas metano nei gasdotti. Vedremo ora un'espressione per la caduta di pressione in questo caso.

Consideriamo qui il volume di gas di fig. 7-10: l'equazione della quantità di moto per il caso di moto permanente monodimensionale è

$$\sum F_x = \dot{m}(V + dV - V)$$

$$[p - (p + dp)](\tfrac{1}{4}\pi D^2) - \tau_0 \pi D\, dx = (\tfrac{1}{4}\pi D^2)\rho V\, dV$$

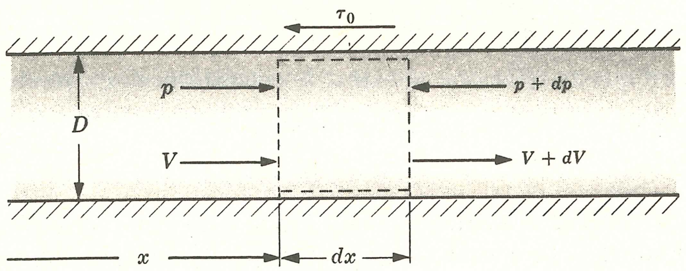


Fig. 7-10. Elemento di volume per il moto isotermo in un condotto a sezione costante.

Combinando allora l'espressione del coefficiente d'attrito

$$f \equiv \tau_0/(\tfrac{1}{2}\rho V^2)$$

con l'equazione della quantità di moto e semplificando, abbiamo

$$\frac{v}{V^2}dp + \frac{2f}{D}dx + \frac{dV}{V} = 0$$

Se all'equazione di continuità abbiniamo quella di stato dei gas ideali a temperatura costante, ricaviamo

$$\frac{v}{V^2} = \frac{v_1}{V_1^2 p_1}p$$

E questa con l'equazione della quantità di moto ci dà

$$\frac{v_1}{V_1^2 p_1}p\, dp + \frac{2f}{D}dx + \frac{dV}{V} = 0$$

Accetteremo l'ipotesi che il coefficiente d'attrito dipenda solo dal numero di Reynolds (per un tubo assegnato); quest'ultimo sarà allora costante nel moto isotermo, e con esso sarà costante il coefficiente d'attrito. (Notare: ρV = costante; $\mu = f(T)$ = costante.)

Ora possiamo integrare l'equazione della quantità di moto:

$$(p/p_1)^2 = 1 - kM_1^2(2 \ln V/V_1 + 4fL/D) \qquad (7.22)$$

in cui L è la distanza tra le stazioni contrassegnate con l'indice 1 e le grandezze senza indice. Possiamo riscrivere la (7.22):

$$fL/D = \frac{1}{4kM_1^2}[1 - (p/p_1)^2] + \tfrac{1}{2}\ln p/p_1 \qquad (7.23)$$

Così la pressione è una funzione non lineare della lunghezza, mentre nel moto incompressibile essa è funzione lineare della distanza.

Se mettiamo insieme le equazioni della quantità di moto e della continuità possiamo dimostrare che il numero di Mach all'uscita del tubo nel caso di moto strozzato è $M^* = 1/\sqrt{k}$. La pressione corrispondente è $p^*/p_1 = M_1\sqrt{k}$.

7.7 MOTO INCOMPRESSIBILE PER BASSI NUMERI DI MACH

Partendo dall'equazione dell'energia

$$\tfrac{1}{2}(V_1^2 - V^2) = h - h_1$$

e scrivendo la trasformazione isentropica di un gas ideale, abbiamo

$$\tfrac{1}{2}(V_1^2 - V^2) = \frac{kRT}{k-1}[1 - (p_1/p)^{(k-1)/k}]$$

Portando $V_1 \to 0$ abbiamo l'espressione della pressione di ristagno:

$$p_0/p = [1 + \tfrac{1}{2}(k-1)M^2]^{k/(k-1)}$$

Se detta equazione viene riscritta in forma di sviluppo binomiale del numero di Mach,

$$p_0 = p + \tfrac{1}{2}\rho V^2[1 + \tfrac{1}{4}M^2 + \tfrac{1}{24}(2-k)M^4 + \cdots] \qquad (7.24)$$

Per piccoli valori dei numeri di Mach abbiamo

$$p_0 = p + \tfrac{1}{2}\rho V^2 \qquad (7.25)$$

che è la stessa espressione della pressione di ristagno nel caso del moto incompressibile.

Questo risultato è importante: ci dice infatti che il moto adiabatico dei gas attorno a oggetti e nei condotti si può considerare incompressibile finché il numero di Mach è piccolo (diciamo $M < 0{,}3$); e, come abbiamo visto, nel modello a densità costante otteniamo una notevole semplificazione.

7.8 IL TUBO D'URTO

Si tratta di un dispositivo che permette di imprimere a un gas alta velocità e alta temperatura in un breve intervallo di tempo. Il tubo è stagno, e un diaframma lo divide in due parti, una delle quali è ad alta, l'altra a bassa pressione. Il diaframma cede improvvisamente: un'onda d'urto si propaga nel gas in quiete dalla parte a bassa pressione, mentre un'onda di espansione si propaga a sua volta nel gas in quiete dal lato ad alta pressione. Il gas disturbato tra zona d'urto e onde di espansione viaggia ad alta velocità, che può essere (se riferita al gas in quiete e al condotto) supersonica. I tubi d'urto sono usati nelle gallerie del vento intermittenti e nelle soffierie ad alta velocità istantanea.

(a) Urto generato da uno stantuffo.

Prima di esaminare il tubo stesso, consideriamo i tipi di onde che in esso vengono generate. Vediamo un'onda d'urto generata da uno stantuffo in moto come in fig. 7-11: si tratta di un urto normale, per il quale abbiamo già calcolato le condizioni. Il gas compresso tra stantuffo e urto avrà la stessa velocità di quest'ultimo.

Il diagramma x-t ci mostra i percorsi dello stantuffo e dell'onda d'urto; le pendenze delle rette sono pari ai reciproci delle velocità.

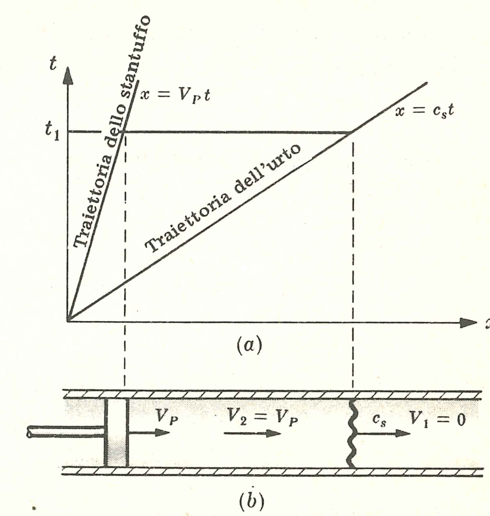


Fig. 7-11. Onda d'urto generata da uno stantuffo in moto. (a) Diagramma x-t. (b) Il tubo al tempo t_1. V è la velocità assoluta del gas.

(b) Onde ad espansione centrata.

Se lo stantuffo ora visto al punto (a) viene tirato via dal tubo invece di spingervelo dentro, si sviluppa un'onda di espansione che si allontana dallo stan-

tuffo stesso: è un'onda di espansione isentropica.

L'improvviso retrocedere dello stantuffo crea nella velocità delle particelle (quelle più vicine al suddetto si muovono con lui) e nella pressione una variazione a gradino, che si appiattisce quando l'onda comincia a propagarsi. Localmente, entro l'onda, i disturbi si spostano alla velocità locale del suono. Dato che la pressione (e la temperatura) variano attraverso l'onda, cominciata proprio come variazione a gradino di queste variabili, la locale velocità di propagazione della perturbazione varia entro l'onda allo stesso modo. Sul limite di quest'ultima, adiacente al gas indisturbato, zona 4, temperatura e velocità sonica hanno il loro massimo valore. Sul lato opposto (zona 3) la temperatura, e quindi la velocità del suono, hanno il loro valor minimo. Di conseguenza l'onda di espansione si allarga a ventaglio nel propagarsi, come in fig. 7-12. Il diagramma x-t è appunto un ventaglio di linee a velocità sonica costante, che evidenziano lo svilupparsi dell'onda: sono le linee "caratteristiche" che seguono il tragitto dei disturbi isentropici locali. La velocità assoluta di questi ultimi è pari alla somma della velocità locale del suono e della velocità assoluta locale del gas. L'ultima caratteristica a destra (condizione 4) ha pendenza $dx/dt = a_4$, quella a sinistra ha pendenza $dx/dt = a_3 + V_3$. V_3 è positiva verso destra, e qui è negativa (perché V_3 dev'essere uguale a $-V_P$). Quindi dx/dt potrà essere positiva o negativa, a seconda che sia rispettivamente $a_3 > V_3$ o $a_3 < V_3$.

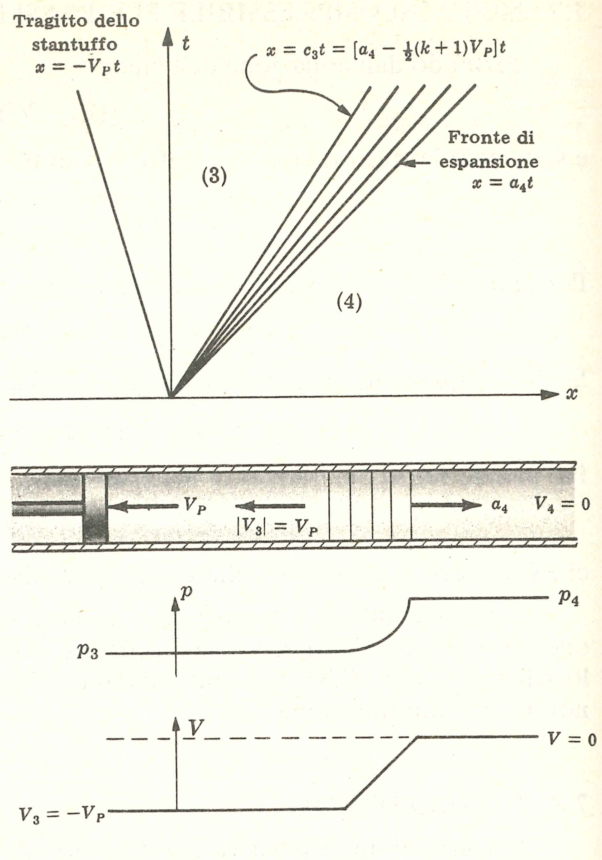


Fig. 7-12. L'espansione centrata a ventaglio è generata dallo stantuffo ritirato da un tubo.

Possiamo valutare esplicitamente a_3 e la struttura del ventaglio, nel modo che segue. Scriviamo la velocità locale del suono nel ventaglio, in funzione di a_4 e usando le relazioni isentropiche:

$$a = a_4(\rho/\rho_4)^{(k-1)/2}$$

e possiamo scrivere la velocità locale di una particella dell'onda (vedi riferimento 1 di pag. 148):

$$dV = a\frac{d\rho}{\rho}$$

integrabile usando l'espressione precedente:

$$a = a_4 + \tfrac{1}{2}(k-1)V$$

La velocità c assoluta dell'onda (per la parte compresa dietro il fronte) è pari allora alla somma della velocità locale del suono e della velocità del fluido:

$$c = a + V = a_4 + \tfrac{1}{2}(k+1)V$$

Ora, V è negativa; c allora diminuisce attraverso l'onda, al passare dalla zona 4 alla 3. L'ultima caratteristica a sinistra ha pendenza

$$c_3 = a_4 + \tfrac{1}{2}(k+1)V_3 = a_4 - \tfrac{1}{2}(k+1)V_P \qquad (7.26)$$

(positiva o negativa, e con pendenza verso destra o verso sinistra). Le variazioni di densità e pressione attraverso il ventaglio ci vengono date dalle relazioni isentropiche:

$$\rho_3/\rho_4 = [1 - \tfrac{1}{2}(k-1)(V_P/a_4)]^{2/(k-1)} \qquad (7.27)$$

$$p_3/p_4 = [1 - \tfrac{1}{2}(k-1)(V_P/a_4)]^{2k/(k-1)} \qquad (7.28)$$

nelle quali V_P è un numero positivo.

(c) Moto nel tubo d'urto.

Combinando ora l'urto davanti allo stantuffo e il ventaglio da espansione centrata possiamo vedere cosa succede nel tubo d'urto; riferendoci alla fig. 7-13 vediamo che, quando si apre il diaframma, nascono un'onda d'urto ed una di espansione. Si forma una superficie di contatto attraverso la quale pressione e velocità sono costanti, mentre temperatura e densità, e quindi il numero di Mach, sono differenti. Le due condizioni

$$p_2 = p_3, \quad V_2 = V_3$$

sono sufficienti per determinare le condizioni nelle regioni 2 e 3, e quindi i salti attraverso urto e ventaglio. ($V_2 = V_3$ è un numero negativo, perché il gas scorre verso sinistra.) Sempre in funzione delle grandezze note nelle zone 1 e 4, risolviamo la (7.28) rispetto a V_3, in funzione di p_3 e di p_4, e rispetto a V_2 in funzione di p_1 e p_2 dalle normali relazioni dell'urto. Ponendo poi $V_2 = V_3$, ed essendo $p_2 = p_3$, possiamo ottenere un'espressione di p_2. Il risultato

$$\frac{p_4}{p_1} = \frac{p_2}{p_1}\left[1 - \frac{(k-1)(a_1/a_4)(p_2/p_1 - 1)}{\sqrt{2k}\sqrt{2k + (k+1)(p_2/p_1 - 1)}}\right]^{-2k/(k-1)} \qquad (7.29)$$

ci dà implicitamente p_2/p_1. Una volta nota p_2 si trovano facilmente tutti gli altri parametri del problema.

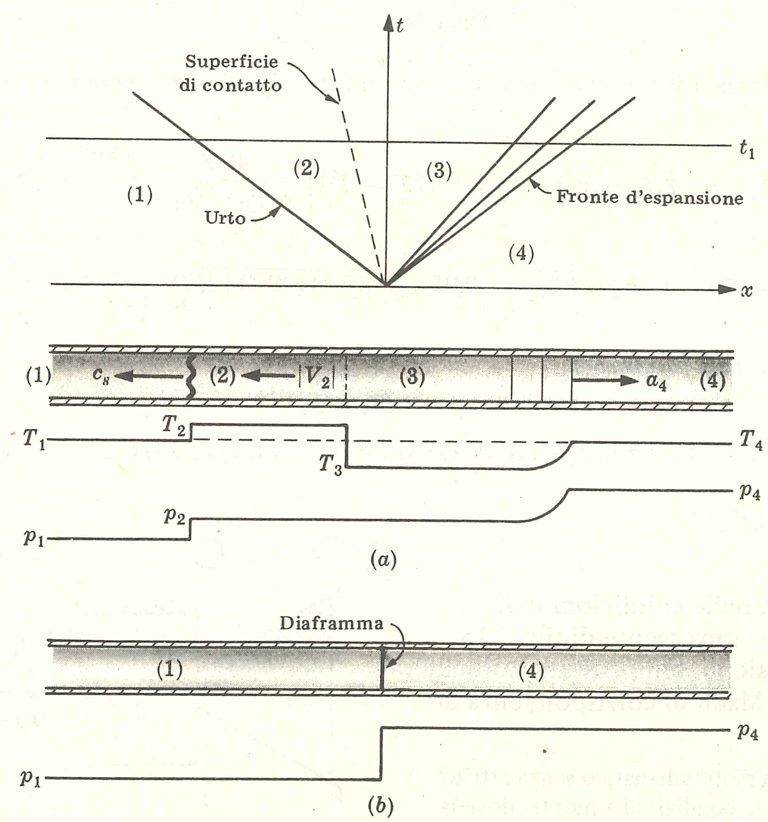


Fig. 7-13. Tubo d'urto. (a) Tempo $t = t_1$, (b) tempo $t = 0$.

BIBLIOGRAFIA

1. Liepmann H. W., Roshko A., *Elements of Gasdynamics*, John Wiley, 1957.
2. Owczarek J. A., *Fundamentals of Gas Dynamics*, International Textbook, 1964.
3. Shames I. H., *Mechanics of Fluids*, McGraw-Hill, 1962.
4. Shapiro A. H., *The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow*, Ronald Press, 1953.
5. Nobile U., *Elementi di Aerodinamica*, vol. II, Roma, Libreria dello Stato, 1954.
6. Eula A., *Lezioni di Aerodinamica*, Università di Roma, 1968.

PROBLEMI RISOLTI

7.1. Un aereo vola alla quota di 3000 m; la temperatura esterna è di $-7\ °C$, la pressione di 53 cm di mercurio. A un certo punto dell'ala (fig. 7-14) la pressione statica è di 4800 kg/m², e il valore locale del numero di Mach è 0,95. Nel caso di un moto adiabatico senza attrito, quale sarà la velocità dell'aereo relativa all'aria indisturbata?

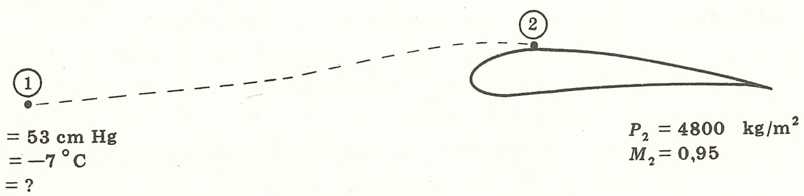


Fig. 7-14

Consideriamo fermo l'aereo, e l'aria in moto come in figura. Per il moto isentropico di un gas ideale avremo

$$T_2 = T_1(p_2/p_1)^{(k-1)/k} = (273-7°)\left[\frac{4800}{0{,}53(13600)}\right]^{0{,}286} = 237\ \text{K}$$

e $$V_2 = M_2 a_2 = M_2\sqrt{kRT_2} = 0{,}95\sqrt{1{,}4(9{,}8)(29{,}3)(237)} = 293\ \text{m/s}$$

Allora dall'equazione dell'energia,

$$V_1^2/2 + h_1 = V_2^2/2 + h_2$$

e $$V_1^2 = V_2^2 + 2c_p(T_2 - T_1) = (293)^2 + 2(9{,}8)(427)(0{,}24)(237-266) = 27400\ \text{m}^2/\text{s}^2$$

così che $V_1 = 166$ m/s.

7.2. L'aria scorre, nelle condizioni indicate, nel condotto convergente di fig. 7-15. Trovare pressione, temperatura, velocità e numero di Mach in corrispondenza alla sezione 2.

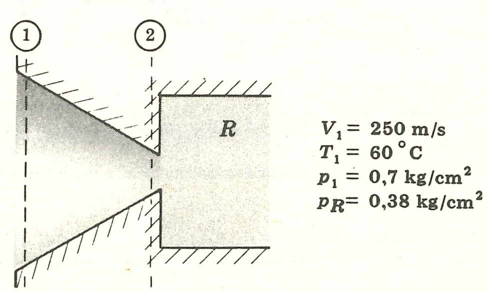


Fig. 7-15

Assumiamo un moto adiabatico senza attrito. Determiniamo le condizioni a monte, dove la velocità è trascurabile. Dall'equazione della energia abbiamo

$$T_0 = T_1 + \frac{V_1^2}{2c_p} = (60+273) + \frac{(250)^2}{2(9{,}8)(427)(0{,}24)} = 364\ \text{K}$$

e $$p_0 = p_1(T_0/T_1)^{k/(k-1)} = 0{,}7[364/(60+273)]^{3{,}5} = 0{,}95\ \text{kg/cm}^2$$

così che $$p_R/p_0 = 0{,}38/0{,}95 = 0{,}40$$

con T_0, p_0 rispettivamente uguali alla temperatura e alla pressione di ristagno.

Il rapporto critico tra le pressioni è $p_c/p_0 = [2/(k+1)]^{k/(k-1)} = 0{,}528$. La pressione nel diffusore è allora al di sotto della critica, e l'ugello è "strozzato": $p_2 = p_c$, con p_c pressione critica $= 0{,}528\, p_0$.

Troviamo quindi

$$p_2 = 0{,}528 \times 0{,}95 = 0{,}50\ \text{kg/cm}^2$$

$$T_2 = T_1(p_2/p_1)^{(k-1)/k} = (60+273)[0{,}50/0{,}7]^{0{,}286} = 302\ \text{K}$$

$$M_2 = 1{,}0 \text{ (moto strozzato)}$$

$$V_2 = a_2 = \sqrt{kRT_2} = \sqrt{1{,}4 \times 9{,}8 \times 29{,}3 \times 302} = 348\ \text{m/s}$$

7.3. Pressione e temperatura dell'aria all'ingresso di un condotto convergente-divergente sono di 1,0 kg/cm² e di 20 °C. In una sezione del divergente la pressione è di 0,095 kg/cm²: trovare a quale area detta pressione corrisponde. L'area della sezione di gola è di 6,0 cm².

Assumiamo un moto adiabatico senza attrito; noteremo che la pressione nella parte divergente dell'ugello è al di sotto di quella critica: l'ugello è dunque strozzato, e la pressione p_t in gola è

$$p_t = p_c = 1{,}0[2/(k+1)]^{k/(k-1)} = 1{,}0 \times 0{,}528\ \text{kg/cm}^2 = 0{,}528\ \text{kg/cm}^2$$

così che $$T_t = T_0(p_t/p_0)^{(k-1)/k} = (20+273)[0{,}095/1{,}0]^{0{,}286} = 149\ \text{K}$$

e $$V_t = \sqrt{kRT_t} = \sqrt{1{,}4 \times 9{,}8 \times 29{,}3 \times 149} = 245\ \text{m/s}$$

L'equazione dell'energia ci dà $$V_3^2/2 + h_3 = h_0$$

così che $$V_3 = \sqrt{2c_p(T_0 - T_3)} = \sqrt{2 \times 0{,}24 \times 9{,}8 \times 427 \times (293-149)} = 537\ \text{m/s}$$

L'equazione di continuità è $$\rho_t A_t V_t = \rho_3 A_3 V_3$$

e quindi $$A_3 = A_t\frac{\rho_t}{\rho_3}\frac{V_t}{V_3} = A_t\frac{p_t}{p_3}\frac{T_3}{T_t}\frac{V_t}{V_3} = 6{,}0\,\frac{0{,}528}{0{,}095} \times \frac{149}{244} \times \frac{245}{537} \simeq 9{,}3\ \text{cm}^2$$

7.4. L'aria scorre nel condotto orizzontale isolato, a diametro costante, di fig. 7-16. Le condizioni all'ingresso sono $p_1 = 7{,}0$ kg/cm², $T_1 = 38$ °C, $V_1 = 150$ m/s. Il diametro del tubo è di 0,15 m; il moto è "strozzato". Trovare la forza esercitata dal fluido sul tubo.

Possiamo applicare l'equazione della quantità di moto al volume di controllo che racchiude il fluido compreso tra ingresso e uscita:

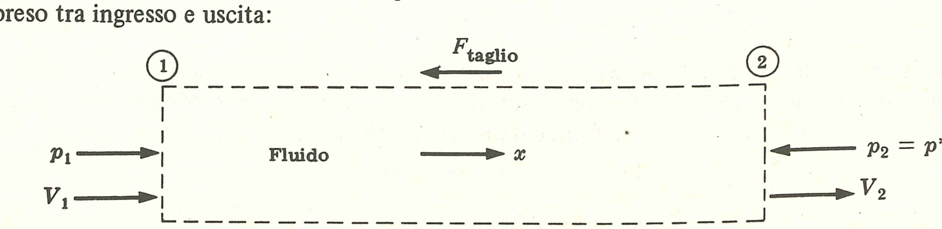


Fig. 7-16

$$\sum F_x = \dot{m}(V_2 - V_1)$$

ovvero
$$(p_1 - p_2)(\pi D^2/4) - F_{taglio} = \rho_1 A_1 V_1 (V_2 - V_1)$$

Dobbiamo ora trovare le condizioni all'uscita; abbiamo

$$M_2 = M^* = 1{,}0 \text{ (moto strozzato)}$$

così che
$$V_2 = \sqrt{kRT_2}$$

Dall'equazione dell'energia,

$$V_2^2 = V_1^2 + 2c_p(T_1 - T_2) = V_1^2 + 2c_p(T_1 - V_2^2/kR)$$

Allora
$$V_2^2 = \frac{V_1^2 + 2c_pT_1}{1 + 2c_p/kR} = \frac{V_1^2 + 2c_pT_1}{1 + 2/(k-1)}$$

$$V_2 = \left[\frac{(150)^2 + 2 \times 9{,}8 \times 427 \times 0{,}24 \times 311}{1 + 2/0{,}4}\right]^{1/2} = 328 \text{ m/s}$$

La temperatura all'uscita è

$$T_2 = \frac{V_2^2}{kR} = \frac{(328)^2}{1{,}4 \times 9{,}8 \times 29{,}3} = 269 \text{ K}$$

E dall'equazione di continuità abbiamo

$$\rho_2 V_2 = \rho_1 V_1$$

Quindi
$$(p_2/T_2)V_2 = (p_1/T_1)V_1$$

e
$$p_2 = p_1 \frac{T_2 V_1}{T_1 V_2} = 7{,}0 \times \frac{269}{311} \times \frac{150}{328} = 2{,}75 \text{ kg/cm}^2$$

Allora
$$(p_1 - p_2)(\pi D^2/4) = (7{,}0 - 2{,}75)\ \frac{\pi(0{,}15)^2}{4} \times 10^4 = 750 \text{ kg}$$

e
$$\rho_1 A_1 V_1 (V_2 - V_1) = \frac{7{,}0 \times 10^4}{29{,}3 \times 9{,}8 \times 311} \times \frac{\pi(0{,}15)^2}{4} \times 150\,(328 - 150) = 368 \text{ kg}$$

così che infine la forza che il tubo esercita sul fluido è

$$F_{taglio} = 750 - 368 = 382 \text{ kg}$$

e la direzione è quella di fig. 7-16.

7.5. Dimostrare che per un fluido compressibile in moto isotermo, senza lavoro dall'esterno,

$$\frac{dM^2}{M^2} = 2\frac{dV}{V}$$

Per la definizione di numero di Mach abbiamo $M^2 = V^2/a^2$. Se accettiamo l'ipotesi che il fluido sia un gas ideale, avremo $a = \sqrt{kRT}$. Nel moto isotermo allora a sarà costante. Prendendo il logaritmo di ambo i membri dell'equazione che definisce il numero di Mach:

$$\ln M^2 = \ln V^2 - \ln a^2$$

ovvero
$$\ln M^2 = 2 \ln V - \ln a^2$$

E differenziando:
$$\frac{dM^2}{M^2} = 2\frac{dV}{V}$$

7.6. Dimostrare che per un gas perfetto che scorre in un condotto a sezione costante e a temperatura costante,

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dV}{V} = -\frac{1}{2}\frac{dM^2}{M^2}$$

Nel caso di un moto monodimensionale e permanente l'equazione di continuità è ρVA = costante; ed essendo costante l'area A, abbiamo ρV = costante. Grazie all'equazione di stato dei gas ideali possiamo eliminare la densità, e abbiamo pV = costante, che possiamo differenziare:

$$p\,dV + V\,dp = 0$$

e dividendo per pV:
$$\frac{dp}{p} = -\frac{dV}{V}$$

Usando poi i risultati ottenuti nel problema 7.5 abbiamo

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dM^2}{M^2}$$

7.7. Dimostrare che nel moto adiabatico di un gas perfetto,

$$T/T_0 = 1 - \tfrac{1}{2}(k-1)(V/a_0)^2$$

in cui T_0 è la temperatura di ristagno, e a_0 la velocità del suono nelle condizioni di ristagno ($a_0 = \sqrt{kRT_0}$).

Dall'equazione dell'energia per il moto permanente monodimensionale, lavoro zero e moto adiabatico, abbiamo

$$h - h_0 = -V^2/2$$

Con un gas perfetto e c_p costante,

$$c_p(T - T_0) = -V^2/2$$

Dividendo per T_0 e per c_p:

$$T/T_0 = 1 - V^2/2c_pT_0$$

Ma $c_p = Rk/(k-1)$ e $T_0 = a_0^2/Rk$, che sostituiti nell'equazione precedente ci danno:

$$T/T_0 = 1 - \tfrac{1}{2}(k-1)(V/a_0)^2$$

PROBLEMI SUPPLEMENTARI

Distinguere nei problemi 7.8-7.25 le affermazioni vere da quelle false.

7.8. Onde sonore e onde d'urto
(*a*) non si somigliano affatto.
(*b*) sono le stesse, eccetto l'ammontare delle variazioni nelle proprietà attraverso di loro.
(*c*) sono entrambe dei processi irreversibili.
(*d*) sono entrambe dei processi reversibili.
(*e*) viaggiano nell'aria in quiete a velocità differenti.

7.9. Nel moto isentropico di un gas ideale
(*a*) la temperatura di ristagno è costante.
(*b*) la pressione di ristagno è costante.
(*c*) l'entropia è costante.
(*d*) il massimo numero di Mach è pari ad uno.
(*e*) la temperatura diminuisce all'aumentare della pressione.

7.10. Nel caso di moto di un gas ideale in un condotto convergente
(*a*) la temperatura diminuisce in direzione del moto.
(*b*) si ha una portata massima possibile quando le condizioni all'ingresso e il diametro in gola siano prefissati.
(*c*) è possibile che si verifichi un urto normale.
(*d*) la velocità crescerà sempre nella direzione del moto.
(*e*) il numero di Mach può essere maggiore di uno.

7.11. Per un gas ideale che scorre in un condotto convergente
(*a*) esiste una portata massima per area all'uscita e condizioni all'ingresso prefissate.
(*b*) il numero di Mach in gola è sempre uno.
(*c*) la temperatura più alta si verifica in gola.
(*d*) la velocità del gas in gola è pari alla velocità del suono all'ingresso, in condizioni di strozzamento.
(*e*) in condizioni critiche si verifica in gola un urto normale.

7.12. Un ugello supersonico con moto isentropico
(*a*) può presentare un urto normale nella zona convergente.
(*b*) può presentare un urto normale nella sezione divergente.
(*c*) non presenta zone d'urto.

7.13. In un condotto convergente-divergente
(*a*) quando il numero di Mach all'uscita è maggiore di uno non si è verificato alcun urto.
(*b*) quando si supera il rapporto critico tra le pressioni, il numero di Mach in gola è maggiore dell'unità.
(*c*) se in gola si ha velocità sonica, in una posizione assegnata a valle si può avere un solo valore della pressione.
(*d*) il numero di Mach in gola è sempre uguale ad uno.

7.14. Per il moto di un fluido compressibile in un tubo convergente-divergente che opera in condizioni di strozzamento,
(*a*) il moto è supersonico in tutta la zona divergente.
(*b*) nella zona convergente si può verificare un urto normale.
(*c*) nella zona divergente si può verificare un urto normale.
(*d*) il numero di Mach in gola è sempre uguale ad uno.
(*e*) il rapporto tra pressione in gola e pressione all'ingresso non dipende dalla geometria del moto.

7.15. In un urto normale del moto monodimensionale
(*a*) velocità, pressione e densità aumentano.
(*b*) pressione, densità e temperatura aumentano.
(*c*) velocità, temperatura e densità aumentano.
(*d*) l'entalpia di ristagno non varia.

7.16. Un urto normale
(*a*) si può verificare solo quando il moto è supersonico.
(*b*) provoca sempre un aumento di temperatura.
(*c*) provoca sempre una diminuzione di pressione.
(*d*) si muove sempre, relativamente al fluido, con velocità pari a quella del suono.
(*e*) si può verificare nel moto subsonico.

7.17. Un urto normale
(*a*) si forma davanti a un corpo di forma schiacciata, che si muova a velocità supersonica in un fluido compressibile.
(*b*) si verifica solo quando il moto è supersonico.
(*c*) fa aumentare l'entropia del fluido.
(*d*) coinvolge una trasformazione adiabatica senza attrito.
(*e*) è impossibile.

7.18. Nel moto adiabatico subsonico con attrito, in un condotto di sezione costante
(*a*) la temperatura aumenta in direzione del moto.
(*b*) la temperatura di ristagno diminuisce.
(*c*) la pressione di ristagno diminuisce.
(*d*) la velocità aumenta.
(*e*) il numero limite di Mach è uno.

7.19. La linea di Fanno
(*a*) rappresenta una serie di stati di equilibrio sul diagramma *h-s*, nel caso di moto adiabatico.
(*b*) rappresenta una serie di stati di equilibrio sul diagramma *h-s*, nel caso di moto con attrito.
(*c*) è stata ricavata dalle equazioni dell'energia, di continuità e di stato.
(*d*) rappresenta solo un moto subsonico.
(*e*) rappresenta un moto isotermo in un condotto a sezione costante.

7.20. Nel moto supersonico adiabatico con attrito, in un condotto a sezione costante
(*a*) la temperatura aumenta nella direzione del moto.
(*b*) la temperatura di ristagno diminuisce.
(*c*) la pressione di ristagno diminuisce.
(*d*) la velocità aumenta.
(*e*) il numero di Mach limite è uno.

7.21. Nel moto isotermo di un gas ideale, in un condotto a sezione costante
(*a*) la pressione diminuisce in direzione del moto.
(*b*) il fluido perde calore.
(*c*) le particelle del fluido vengono accelerate.
(*d*) la densità del fluido diminuisce.
(*e*) il massimo numero di Mach è uno.

7.22. Per il moto di un gas ideale in un condotto isolato a sezione costante, dal numero di Mach iniziale minore di uno
(*a*) la velocità diminuisce in direzione del moto.
(*b*) la temperatura diminuisce in direzione del moto.
(*c*) il numero di Mach può arrivare a un valore maggiore di uno.
(*d*) l'entropia cresce sempre in direzione del moto.
(*e*) la pressione è costante.

7.23. Alcuni dei risultati del raffreddamento e del riscaldamento del fluido ideale che scorre in un condotto senza attrito a sezione costante sono:
(*a*) il riscaldamento causa sempre un aumento dell'entropia.
(*b*) il riscaldamento causa sempre un aumento della velocità.
(*c*) il riscaldamento causa sempre un aumento della temperatura.
(*d*) il valor limite del numero di Mach è uno, nel moto subsonico.

7.24. Nel moto adiabatico di un gas ideale in un condotto senza attrito a sezione costante
(*a*) la temperatura di ristagno aumenta con l'aumentare dell'entropia.
(*b*) la massima temperatura si verifica per $M = 1$.
(*c*) il diagramma degli stati d'equilibrio nel piano *h-s* si chiama linea di Rayleigh.
(*d*) valgono le equazioni isentropiche.
(*e*) il numero limite di Mach è uno nel moto supersonico.

7.25. Nel moto adiabatico di un gas ideale in un condotto senza attrito a sezione costante
(*a*) la pressione deve diminuire in direzione del moto.
(*b*) la temperatura resta costante.
(*c*) la velocità resta costante.
(*d*) l'entropia aumenta.
(*e*) il numero di Mach resta costante.

7.26. Qual è la velocità del suono nell'anidride carbonica a 150 °C? E nell'acqua a 15 °C?

7.27. Nel punto A della zona indisturbata della corrente che lambisce un oggetto, la densità è di 0,001225 g/cm³, la pressione è 1,0 kg/cm², la velocità è di 107 m/s. La pressione in un punto B dell'oggetto vale 0,52 kg/cm². Qual è in ogni punto il numero di Mach, nel caso di un moto adiabatico senza attrito?

7.28. Un aereo vola in aria standard a 180 m/s. Trovare il numero di Mach locale su un punto dell'aereo dove la velocità relativa dell'aria è di 61 m/s.

7.29. Un oggetto si muove in aria standard a 120 m/s. Quanto vale la pressione in un punto del corpo nel quale la velocità relativa dell'aria è zero?

7.30. Un proietto smussato si muove in aria stazionaria a 1,0 kg/cm² e 15 °C, alla velocità di 570 m/s. Trovare pressione, entalpia e temperatura di ristagno.

7.31. Si deve progettare un ugello nel quale l'aria si espande da 3,5 kg/cm² e 100 °C a 1,2 kg/cm² con una portata di 0,135 kg massa/s. Calcolare (*a*) il numero di Mach all'uscita dell'ugello, (*b*) la sezione d'uscita in cm².

7.32. L'aria scorre isentropicamente attraverso un ugello convergente, che ha una sezione di gola di 90 cm². L'ingresso è a velocità trascurabile, a una pressione di 4,0 kg/cm² e una temperatura di 95°C; la pressione all'uscita è di 1,0 kg/cm². Trovare la portata in massa, in kg/s.

7.33. Attraverso un ugello convergente-divergente l'aria deve espandersi, con una trasformazione adiabatica senza attrito, da una pressione di 11 kg/cm² e una temperatura di –5 °C ad una pressione di 1,4 kg/cm². Trovare (*a*) la sezione in gola e in uscita per un ugello senza urto ben disegnato se la portata è di 2,0 kg/s, e (*b*) il numero di Mach all'uscita dall'ugello.

7.34. Dell'aria, inizialmente a 3,5 kg/cm² e 120 °C, scorre isentropicamente attraverso un ugello convergente-divergente dalla sezione in gola di 2,5 cm². La pressione a valle è di 1,0 kg/cm², la temperatura di 5 °C. Calcolare (*a*) la portata in kg/s, (*b*) la velocità all'uscita dell'ugello.

7.35. Dell'aria a 7,0 kg/cm² e 60°C scorre attraverso un tubo convergente entro una camera, nella quale la pressione è di 1,4 kg/cm². Avendo un moto adiabatico senza attrito, e velocità a monte trascurabile, calcolare la velocità in gola.

7.36. Tracciare i diagrammi nei piani h-s e T-s per un gas ideale che scorre adiabaticamente attraverso (*a*) una lunga tubazione, (*b*) un ugello, (*c*) un diffusore.

7.37. Un gas (peso molecolare 18, $k = 1{,}3$) deve essere pompato attraverso una tubazione da 36 pollici (0,90 m) che collega due stazioni di compressione distanti 65 chilometri. Nella stazione a monte la pressione non deve superare i 6,3 kg/cm², mentre in quella a valle deve essere almeno di 0,7 kg/cm². Calcolare la massima portata ammissibile (metri cubi al giorno a 20 °C e 1 atm) nell'ipotesi che la trasmissione di calore lungo la tubazione mantenga il fluido a 20 °C. La viscosità cinematica è di 4 x 10^{-5} m²/s.

7.38. L'aria entra in una tubazione da 6 pollici (0,15 m) a 14 kg/cm² e 15 °C, con una velocità di 57 m/s; il coefficiente d'attrito f vale 0,016. Qual è il numero di Mach, e la distanza dall'ingresso della sezione in corrispondenza alla quale la pressione è di 5,0 kg/cm², in moto isotermo?

7.39. L'aria entra in un tubo orizzontale a 42 kg/cm², con una temperatura di 95 °C e una velocità di 90 m/s. Qual è la pressione limite in moto isotermo? E in moto adiabatico?

7.40. L'aria entra in un tubo di acciaio liscio, dal diametro interno di 5 pollici (0,125 m) e lungo 280 m, alla pressione di 8,5 kg/cm² e alla temperatura di 27 °C; la velocità d'ingresso è di 25 m/s. Nel caso di moto isotermo, trovare (*a*) la caduta di pressione in kg/cm² se il fluido si considera incompressibile, (*b*) la stessa se lo si considera compressibile.

7.41. Idrogeno alla pressione iniziale di 4,2 kg/cm² e alla temperatura di 45 °C scorre attraverso una tubazione isolata orizzontale lunga 270 m e con un diametro di 6 cm; il coefficiente d'attrito è 0,015. Qual è la massima portata ammissibile, e che caduta di pressione è necessaria per mantenerla?

7.42. Un grande serbatoio di laboratorio può essere riempito con aria a 14 kg/cm² e a temperatura ambiente. Tracciare il profilo di un ugello supersonico che si possa fissare alla parete del serbatoio per scaricare aria nell'atmosfera ugualmente a velocità supersonica. (Se mettiamo un profilo alare di piccole dimensioni, o un oggetto da provare, nella corrente dell'ugello, otteniamo una galleria intermittente supersonica). Assumiamo che l'aria nel serbatoio, per il breve periodo che ci interessa, resti a 14 kg/cm². In gola dovremmo avere un'area di 3 cm².

NOMENCLATURA USATA NEL CAPITOLO 7

A = area
a = velocità del suono
c_p = calore specifico a pressione costante
c_s = velocità d'urto
c_v = calore specifico a volume costante
f = coefficiente d'attrito
h = entalpia per unità di massa
k = rapporto tra i calori specifici, c_p/c_v
L = lunghezza del condotto
M = numero di Mach, V/a
$\dot{m}$ = portata in massa
p = pressione statica
R = costante dei gas
s = entropia per unità di massa
T = temperatura assoluta
t = tempo
u = energia interna per unità di massa
V = velocità
v = volume specifico = $1/\rho$
x = coordinata assiale
ρ = densità
τ_0 = sforzo di taglio alla parete
$(\,)_c$ = simbolo di condizione critica
$(\,)_0$ = simbolo di condizione di ristagno
$(\,)^*$ = condizioni di corrente "strozzata"

CAPITOLO 8

Moto compressibile bidimensionale Gasdinamica

8.1 EQUAZIONI NEL MOTO COMPRESSIBILE SENZA ATTRITO

Abbiamo discusso nel capitolo 6 il moto potenziale incompressibile bidimensionale, e nel capitolo 7 il moto compressibile monodimensionale. Possiamo ora estendere queste due analisi per sviluppare la trattazione più generale del moto (ideale) senza attrito, compressibile. Essendo ideale, possiamo nuovamente dimostrare che esso è completamente irrotazionale (se il moto della corrente indisturbata è irrotazionale) e quindi potenziale. Dobbiamo allora occuparci di un moto generale potenziale compressibile tridimensionale, anche se nei calcoli ci limiteremo abitualmente a due dimensioni.

Discuteremo come prima il moto al di fuori dello strato limite (moto irrotazionale) e ci preoccuperemo soprattutto dei problemi aerodinamici: il moto intorno alle ali e ai profili affusolati.

Alle basse velocità (numero di Mach minore di circa 0,3) il fluido si comporta come se fosse quasi incompressibile, e l'analisi del moto potenziale incompressibile (capitolo 6) risulta adeguata. All'aumentare della velocità, gli effetti della compressibilità divengono sempre più importanti; quando il numero di Mach supera l'unità, sul corpo attorno al quale studiamo la corrente si possono formare delle onde d'urto. Se il numero di Mach della corrente indisturbata è maggiore dell'unità ($M > 1$) il moto è supersonico, ed è molto diverso dal subsonico ($M < 1$). Quando il moto su una parte del corpo è subsonico e su di un'altra è supersonico, abbiamo una corrente transonica. Nel moto transonico permanente troviamo delle zone a $M > 1$, altre a $M = 1$, altre a $M < 1$. Matematicamente si tratta di un moto abbastanza più complicato di quello puramente subsonico o supersonico. Quando un velivolo accelera dal regime subsonico al supersonico, esso deve necessariamente passare per il transonico.

Studieremo in questo capitolo l'intera escursione dei numeri di Mach, cominciando nella zona subsonica e passando poi ai numeri più grandi. Per M maggiore di circa 6 il moto si considera ipersonico, e molte ipotesi accettate nel moto supersonico ordinario non sussistono più: l'analisi diventa più complicata. Se M passa nella regione ipersonica l'attrito di strato limite aumenta, e la temperatura di ristagno diventa così alta (per M maggiore di circa 6) che la temperatura di strato limite aumenta e la superficie del velivolo può diventare tanto calda da costringere a usare dei materiali refrattari o disperdenti speciali, per evitare danni strutturali. I veicoli di rientro dallo spazio passano attraverso una serie di alti numeri di Mach. Discuteremo nel capitolo 10 la struttura dello strato limite ipersonico; per ora ci concentriamo sulla soluzione di moto potenziale al di fuori dello strato limite. Le leggi che governano il moto sono fondamentalmente le stesse dal moto subsonico all'ipersonico, ma certi termini delle equazioni fondamentali acquistano maggiore o minore importanza al variare di M; invero il significato stesso delle equazioni differenziali cambia a seconda che M sia maggiore o minore dell'unità. Ne risulta che il campo di corrente è completamente diverso nei due casi.

Nella maggior parte dei problemi di aerodinamica compressibile risulta accurata l'ipotesi di moto senza attrito, irrotazionale, completamente isentropico. Nel moto supersonico tuttavia, ogni volta che si possono verificare delle onde d'urto, il moto in dette onde è *non isentropico*.

Rivedremo ora brevemente le equazioni fondamentali del moto senza attrito, isentropico, che vengono meno solo per i calcoli su onde d'urto. Si tratta di equazioni in genere non lineari, e se ne possono sviluppare diverse soluzioni approssimate. In certi esempi si ottengono delle soluzioni esatte persino in presenza di onde d'urto.

Le equazioni fondamentali sono sempre quelle già viste nel capitolo 5, solo che ora bisogna tener conto degli effetti della compressibilità, e dovremo quindi considerare anche l'equazione dell'energia, o una equivalente. Avremo allora le equazioni di continuità, del moto e dell'energia; se quest'ultima viene scritta in funzione della temperatura, avremo anche bisogno di una equazione di stato. Potremo fare a meno dell'equazione dell'energia, per un moto completamente isentropico, usando la relazione tra pressione e densità.

Come dimostrato nel capitolo 5, un moto adiabatico senza attrito è isentropico lungo una linea di corrente quando è irrotazionale. Se inoltre il moto conserva un valore uniforme dell'entalpia totale (o di ristagno) $h_0 = h + V^2/2$ oltre ad essere irrotazionale, esso è anche totalmente isentropico. E' un moto che talvolta viene definito *omentropico.*[1]

Per il moto omentropico di un gas perfetto in due dimensioni, essendo trascurabili le forze di massa, le relazioni fondamentali sono

Continuità:
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \qquad (8.1)$$

Quantità di moto:
$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$
$$\rho\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} \qquad (8.2)$$

Legge isentropica:
$$p/p_0 = (\rho/\rho_0)^k \qquad (8.3)$$

in cui $k = c_p/c_v$ è il rapporto tra i calori specifici, p_0 la pressione, ρ_0 la densità negli stati di riferimento arbitrari, abitualmente assunti uguali ai valori di corrente indisturbata o di ristagno.

Le equazioni da (*8.1*) a (*8.3*) sono indipendenti ma non uniche. Al posto della (*8.3*) potremmo usare l'equazione completa dell'energia, assieme all'equazione di stato. E' un procedimento che si rende necessario nel caso di moto non adiabatico.

Essendo il moto irrotazionale possiamo introdurre il potenziale di velocità, inteso come $\mathbf{V} = -\nabla\phi$. Il termine ∇p si può scrivere allora

$$\nabla p = (\partial p/\partial \rho)_s \nabla \rho = a^2 \nabla \rho \qquad (8.4)$$

in cui a è la velocità del suono. Si può così formare il prodotto scalare di V con l'equazione vettoriale del moto, usando le (*8.4*) e (*8.1*) per eliminare p e ρ. Il risultato è, nel moto bidimensionale,

$$(u^2 - a^2)\frac{\partial u}{\partial x} + (v^2 - a^2)\frac{\partial v}{\partial y} + uv\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0 \qquad (8.5)$$

e la condizione $\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$, ovvero, in funzione di ϕ,

$$\frac{1}{a^2}\left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial y}\left(2\frac{\partial^2 \phi}{\partial x\,\partial y}\right)\right] = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \qquad (8.6)$$

che si riduce a $\nabla^2\phi = 0$ per $a \to \infty$, che è il limite appropriato per un moto incompressibile.

[1] Affermazione che consegue dal teorema di Crocco:
$$T\nabla s + \mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{V}) = \nabla h_0 + \partial \mathbf{V}/\partial t$$
in cui s è l'entropia specifica. Nel moto permanente $\nabla s = 0$ se $\nabla \times \mathbf{V} = 0$ e $\nabla h_0 = 0$. Non dimostreremo qui il teorema, ma esso è una conseguenza dell'equazione del moto e della relazione termodinamica $T\,ds = dh - (1/\rho)\,dp$. Nella maggior parte delle correnti aerodinamiche il fluido esce dallo stesso "serbatoio", la corrente indisturbata, e quindi h_0 è costante.

La (8.6) è equazione unica per ϕ e descrive il moto, ma la velocità del suono a dev'essere collegata alle componenti della velocità attraverso l'equazione dell'energia, e complica così il problema. Completeremo esplicitamente questo calcolo nel paragrafo 8.3, nel quale discuteremo la teoria delle piccole perturbazioni. Con quest'ultimo metodo possiamo ottenere una linearizzazione della (8.6) (e delle soluzioni approssimate risultanti) per corpi sottili come i profili alari e i corpi affusolati di rivoluzione.

Soluzioni esatte di problemi di urto-espansione vengono discusse nel paragrafo 8.2; in 8.4 verranno discussi dei metodi per la soluzione della (8.5).

8.2 TEORIA DELL'URTO-ESPANSIONE

In geometrie semplici si possono ottenere per il moto delle soluzioni esatte, se esso è costituito unicamente di onde d'urto, oppure, insieme o separatamente, da onde di espansione. Discuteremo ora l'onda d'urto obliqua e l'onda di espansione semplice, e mostreremo come queste soluzioni si possano combinare per descrivere il moto attorno ad alcuni profili semplici.

(a) L'urto obliquo.

In fig. 8-1 vediamo un'onda d'urto obliqua. Per la conservazione della quantità di moto, la componente tangenziale della velocità V_t è continua attraverso l'urto, così che $V_{t1} = V_{t2}$. Allora V_{n1} e V_{n2} sono collegate dalle relazioni d'urto normale del capitolo 7, e in termini di velocità normali un urto obliquo è identico a un urto normale e i numeri di Mach (in funzione di V_n, $M_1 = V_{n1}/a_1$), la pressione, la densità, ecc. sono collegati come nel caso dell'urto normale suddetto. Essendo $V_{t1} = V_{t2}$ ma $V_{n1} \neq V_{n2}$, l'effettivo vettore velocità **V** ruota, e cambia in grandezza, nel passare attraverso l'urto come in fig. 8-2. V_{n1} è maggiore della velocità del suono a_1, e V_{n2} dev'essere minore della velocità del suono a_2: comunque, anche se $V_1 > a_1$, V_2 può essere anche maggiore di a_2. In un urto obliquo non è detto che la velocità cada necessariamente a un valore subsonico, anche se questo succede alla sua componente normale.

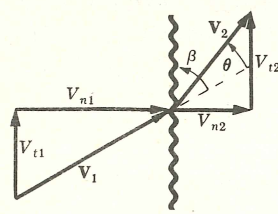


Fig. 8-1. Urto obliquo.

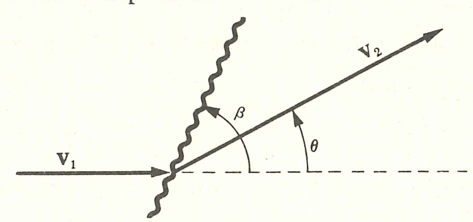


Fig. 8-2. Rotazione del vettore velocità attraverso l'urto.

Definiamo qui M_1 come V_1/a_1 e $V_{n1} = V_1 \sin\beta$ così che $V_{n1}/a_1 = M_1 \sin\beta$. Le relazioni dell'urto normale viste nel capitolo 7 si possono usare se invece di M_1 scriviamo $M_1 \sin\beta$.[2] Diamo i seguenti riferimenti:

$$
\begin{aligned}
\frac{V_{n1}}{V_{n2}} &= \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(k+1)(M_1^2 \sin^2\beta)}{(k-1)M_1^2 \sin^2\beta + 2} \\
\frac{p_2 - p_1}{p_1} &= \frac{2k}{k+1}(M_1^2 \sin^2\beta - 1) \\
\frac{T_2}{T_1} &= \frac{a_2^2}{a_1^2} = 1 + \frac{2(k-1)}{(k+1)^2}\,\frac{M_1^2 \sin^2\beta - 1}{M_1^2 \sin^2\beta}(kM_1^2 \sin^2\beta + 1) \qquad (8.7) \\
\frac{s_2 - s_1}{R} &= \ln\left\{\left[1 + \frac{2k}{k+1}(M_1^2 \sin^2\beta - 1)\right]^{1/(k-1)} \cdot \left[\frac{(k+1)M_1^2 \sin^2\beta}{(k-1)M_1^2 \sin^2\beta + 2}\right]^{-k/(k-1)}\right\} \\
M_2^2 \sin^2(\beta - \theta) &= \frac{1 + \frac{1}{2}(k-1)M_1^2 \sin^2\beta}{kM_1^2 \sin^2\beta - \frac{1}{2}(k-1)}
\end{aligned}
$$

[2] Se invece di M_1 usiamo $M_1 \sin\beta$, possiamo usare le tavole dell'urto normale, come quella, ristretta, riportata nel riferimento 1 di pag. 171.

Possiamo notare che $0 < \beta < \pi/2$ e $M_1 \sin\beta = V_{n1}/a_1 \geq 1$, così che β presenta un valore minimo per un M_1 assegnato. Quindi

$$\sin^{-1} 1/M_1 \leq \beta \leq \pi/2 \qquad (8.8)$$

Per un urto normale, $\beta = \pi/2$. Per un urto debole, quando esso diventa un'onda sonora, $\sin^{-1} 1/M = \beta$.

Si può trovare il valore di M_2 notando che $M_2 = V_2/a_2$ e $V_{n2}/a_2 = M_2 \sin(\beta - \theta)$. Dalla relazione dell'urto normale

$$M_2^2 = \frac{1 + \frac{1}{2}(k-1)M_1^2}{kM_1^2 - \frac{1}{2}(k-1)}$$

otteniamo, sostituendo a M_1 e M_2 rispettivamente $M_1 \sin\beta$ e $M_2 \sin(\beta - \theta)$,

$$M_2^2 \sin^2(\beta - \theta) = \frac{1 + \frac{1}{2}(k-1)M_1^2 \sin^2\beta}{kM_1^2 \sin^2\beta - \frac{1}{2}(k-1)} \qquad (8.9)$$

Possiamo collegare β e θ usando la prima delle (8.7) e sfruttando la relazione geometrica tra V_{2n} e V_{1n}: $(\tan\beta = V_{n1}/V_{t1}$, $\tan(\beta - \theta) = V_{n2}/V_{t1})$. Allora

$$\frac{\tan(\beta - \theta)}{\tan\beta} = \frac{(k-1)M_1^2 \sin^2\beta + 2}{(k+1)M_1^2 \sin^2\beta}$$

che si può scrivere

$$\tan\theta = 2\cot\beta\,\frac{M_1^2 \sin^2\beta - 1}{M_1^2(k + \cos 2\beta) + 2} \qquad (8.10)$$

Per un dato M_1 abbiamo due valori di β per ogni valore di θ; vediamo in fig. 8-3 un diagramma di questa equazione.

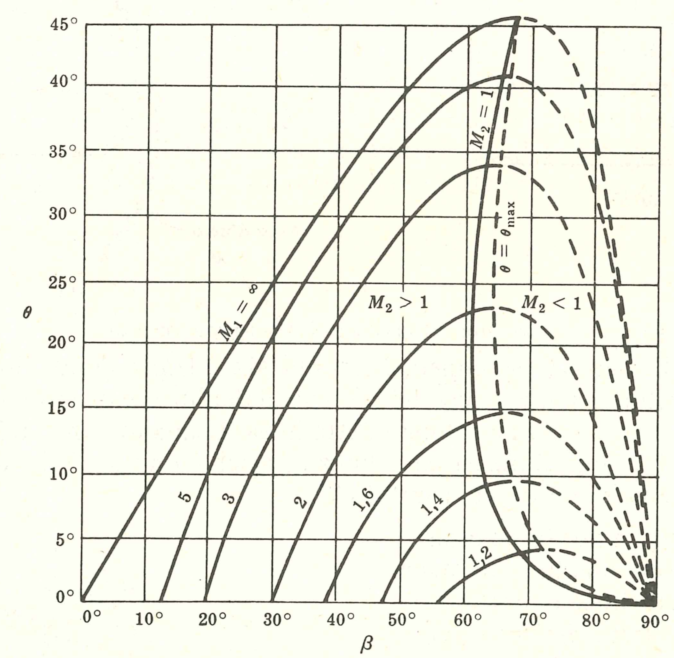


Fig. 8-3. β in funzione di θ in un urto obliquo.

Per ogni valore di θ (minore di θ_{max}) abbiamo due soluzioni. In pratica la soluzione più debole (β più piccolo) è la più frequente (se $\theta < 45°$). Corrisponde un M_2 che resta > 1, a parte una piccola regione compresa tra le linee $M_2 = 1$ e $\theta = \theta_{max}$.

Cosa determina in pratica β e θ? In altri termini, come nascono gli urti obliqui? Un esempio semplice ci viene offerto dalla corrente che lambisce uno spigolo, come in fig. 8-4(*a*). Un cuneo simmetrico darebbe alla corrente un andamento simmetrico attorno all'asse di simmetria orizzontale [vedi fig. 8-4(*b*)]. Il vettore $\mathbf{V}_2$ è parallelo alla superficie del cuneo (o dell'angolo), dalla quale dipende θ. Allora, se M_1 è specificato, β viene di conseguenza.

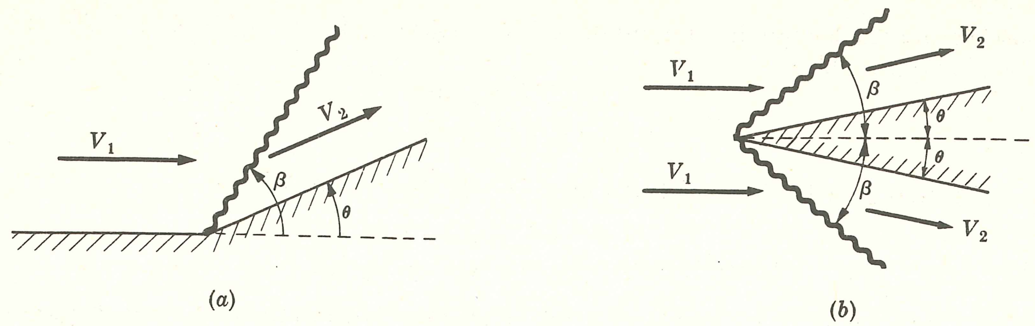


Fig. 8-4. Urto obliquo provocato da una corrente (*a*) su uno spigolo e (*b*) su un profilo a diamante.

Che cosa accade se $\theta > 45°$ (vedi fig. 8-3)? Non esiste una soluzione obliqua semplice: l'urto diventa "distaccato", c'è separazione, e la corrente arretra sullo spigolo. La soluzione è quella che si avrebbe per un urto normale sul vertice, e M_2 risulta inferiore a 1 (fig. 8-5). Se poi l'oggetto non è affusolato l'urto è sempre distaccato (perché $\theta = 90°$ sul fronte d'urto). La linea tratteggiata, che corrisponde a $M = 1$ in fig. 8-5, si chiama linea sonica ed è confine tra le regioni del moto supersonico e di quello subsonico.

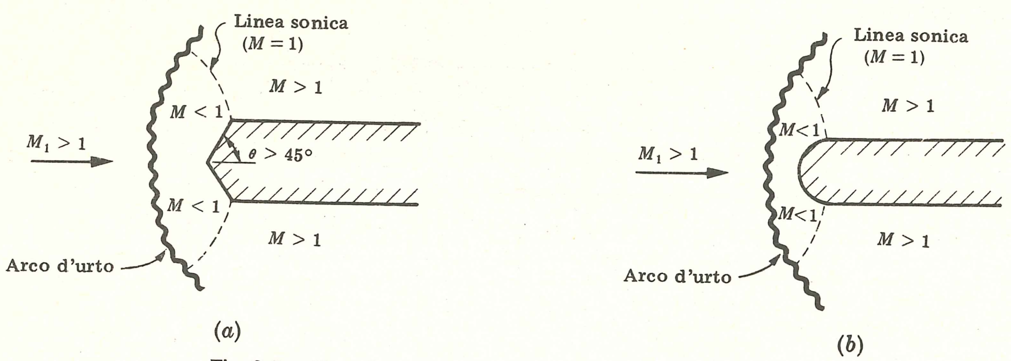


Fig. 8-5. Urto distaccato: (*a*) su cuneo, (*b*) su oggetto smussato.

Al tendere a zero dell'angolo θ del cuneo, β diventa $\sin^{-1} 1/M$ e l'onda diventa una *linea di Mach*, luogo delle perturbazioni soniche, perché l'intensità dell'urto è diventata zero e qualsiasi disturbo, infinitesimo o sonico, si propaga lungo detta linea. L'angolo, $\sin^{-1} 1/M$, si indica con μ e si chiama *angolo di Mach*. In tre dimensioni la linea di Mach è un cono (che emana da una perturbazione puntiforme, come si è visto nel capitolo 7).

In due dimensioni, ad un punto qualsiasi della corrente corrispondono due linee di Mach (per $\pm\beta = \sin^{-1} 1/M$ delle linee di corrente). Queste linee si chiamano *caratteristiche* e sono necessariamente orientate verso valle, dato che non può esservi influenza a monte nel moto supersonico (fig. 8-6).

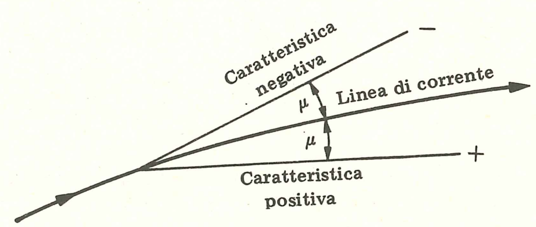


Fig. 8-6. Linee caratteristiche nel moto supersonico. ($\theta \to 0$ e $\beta \to \mu = \sin^{-1} 1/M$). L'assieme positivo corre a destra delle linee di corrente, quello negativo a sinistra.

Se l'angolo θ diventa piccolo, ma finito, l'urto si fa debole e le relazioni d'urto diventano più semplici. Si può dimostrare che attraverso l'urto $\Delta p \sim \theta$ e $\Delta s \sim \theta^3$, così che per urti molto deboli la corrente diventa quasi isen-

tropica. La variazione di velocità ΔV attraverso l'urto debole è approssimativamente, per una deviazione $\Delta\theta$ della corrente,

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{\Delta\theta}{\sqrt{M_1^2 - 1}} \tag{8.11}$$

che è esatta nel moto isentropico. Se la compressione ha luogo attraverso una piegatura continua (fig. 8-7) si forma una famiglia di linee di Mach e la (*8.11*) si può mettere in forma differenziale

$$\frac{dV}{V} = -\frac{d\theta}{\sqrt{M_1^2 - 1}} \tag{8.12}$$

Le linee di Mach si fondono e formano un'onda d'urto, ma vicino al corpo, nel ventaglio di compressione delle linee stesse, il moto è approssimativamente isentropico.

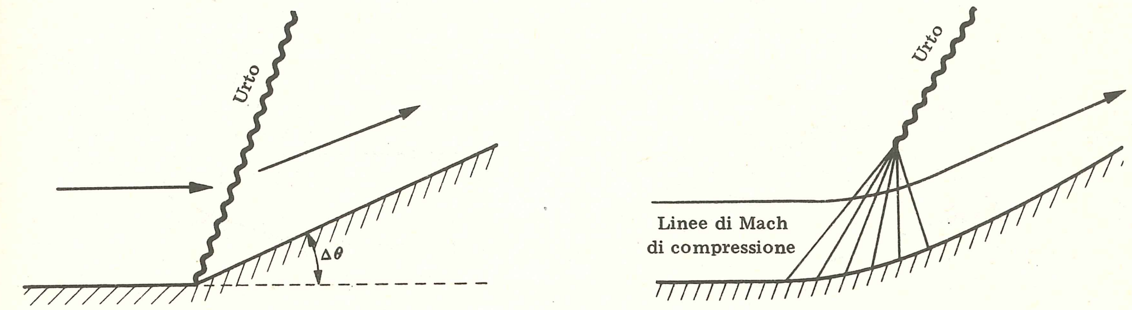


Fig. 8-7. Compressione per deviazione nel moto supersonico.

(*b*) Espansione supersonica; funzione di Prandtl-Meyer.

Nel moto attorno a un angolo convesso, o superficie curva convessa, non si può formare urto e la corrente si espande isentropicamente (fig. 8-8). Una singola onda non va bene per questa trasformazione – si assisterebbe ad una diminuzione di entropia – e deve esistere allora un ventaglio di onde. Le linee di fig. 8-8 sono in effetti linee di Mach, o caratteristiche. In qualsiasi punto esse sono inclinate rispetto alle linee di corrente di un angolo $\sin^{-1} 1/M$.

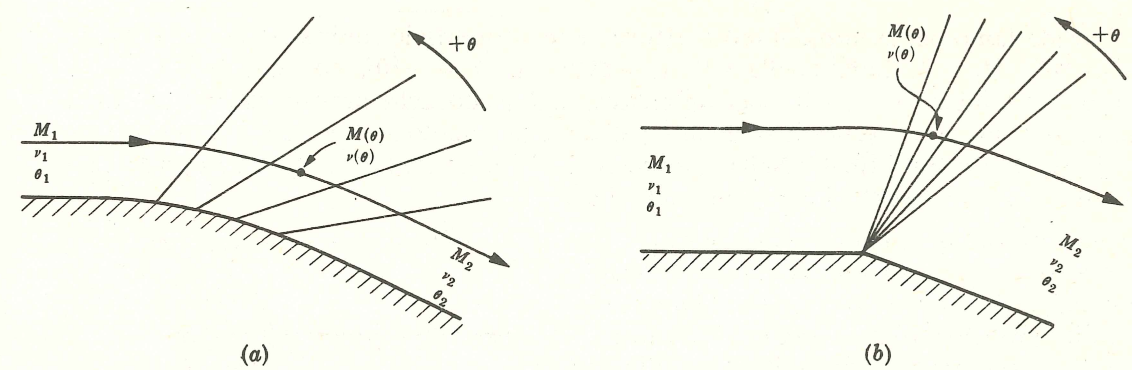


Fig. 8-8. Espansione supersonica su una superficie convessa: (*a*) espansione continua attorno a una curva, (*b*) ventaglio di espansione con il centro su uno spigolo.

La (*8.12*) sussiste in tutta l'espansione, e l'angolo θ è l'inclinazione della linea di corrente rispetto a un riferimento arbitrario. Si prende di solito $\theta_1 \doteq 0$, con θ positivo in senso antiorario (vedi fig. 8-8, dove θ_2 è negativo se prendiamo $\theta_1 = 0$). Possiamo integrare la (*8.12*):

$$-\theta + \text{costante} = \int_{V_1}^{V} \sqrt{M^2 - 1}\,\frac{dV}{V} = \nu(M) \tag{8.13}$$

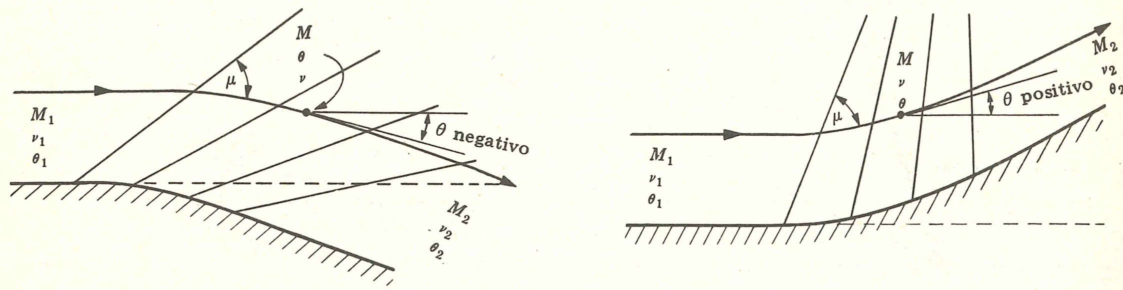
La funzione $\nu(M)$ si chiama funzione di Prandtl-Meyer, e si calcola esplicitamente con la

$$\nu(M) \;=\; \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\,\tan^{-1}\sqrt{\frac{k-1}{k+1}(M^2-1)} \;-\; \tan^{-1}\sqrt{M^2-1} \qquad (8.14)$$

nella quale ν è dato in radianti. Nella (*8.13*) scegliamo arbitrariamente la costante in modo che sia $\nu = 0$ quando $M = 1$, ed abbiamo così

$$-(\theta-\theta_1) \;=\; \nu(M) - \nu_1(M_1) \qquad (8.15)$$

Per un valore assegnato di θ_1 (di solito, zero) e M_1, possiamo trovare $\nu(M)$ e quindi M per un valore qualsiasi di θ. (La $\nu(M)$ è una funzione monotòna di M, e varia da 0 per $M = 1$ a ν_{max} per $M \to \infty$, essendo $\nu_{max} = \frac{1}{2}\pi\left(\sqrt{(k+1)/(k-1)} - 1\right)$.) In una espansione supersonica, θ è negativo; nella compressione è positivo (vedi fig. 8-9).



(*a*) Espansione supersonica (*b*) Compressione supersonica

Fig. 8-9. Espansione e compressione supersoniche. Localmente, l'angolo compreso tra linea di Mach e linea di corrente è μ.

Diamo qui sotto, in gradi, una succinta tabella di $\nu(M)$.[3]

Tabella 8.1. Funzione di Prandtl-Meyer

ν (gradi)	0,0	26,5	49,8	65,7	77,0	85,0	91,0	95,6	99,3
M	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00	6,00	7,00	8,00	9,00

Consideriamo per esempio il moto attorno a una superficie convessa (fig. 8-8*a*) per un angolo totale di 10°; $M_1 = 2$. Dalla tabella 8.1, $\nu_1 = 26{,}5°$ e $\theta_2 = -10°$, così che dalla (*8.15*) $\nu_2 =$ $= 26{,}5° + 10° = 36{,}5°$ e perciò M_2 vale all'incirca 2,39. Si noti che per trovare lo stato finale la curvatura non ha importanza; per le onde di espansione un angolo acuto o una curva ben raccordata hanno lo stesso risultato finale. Nella compressione invece, una curva dolce è isentropica; un angolo acuto concavo darebbe luogo a un'onda d'urto.

Che cosa accade quando l'espansione si verifica attorno ad un angolo, nel quale θ è maggiore di ν_{max}? Le linee di corrente si comportano come se il moto si verificasse su di una espansione di ν_{max}, con una zona di fluido stagnante compresa tra "corrente slittante", o "discontinuità tangenziale", e l'oggetto in esame. Attraverso questa corrente pressione e densità sono continue, ma la velocità è discontinua; vedi fig. 8-10. (In pratica, al formarsi del foglio vorticoso, corrente slittante e fluido sotto di essa possono essere turbolenti, e non ristagnanti.)

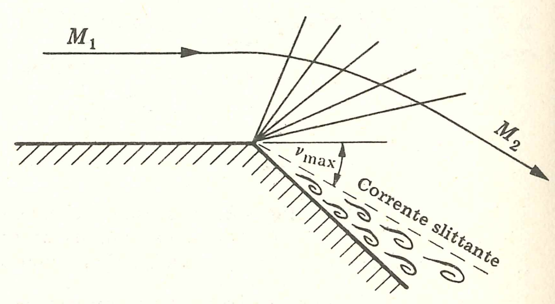


Fig. 8-10. Espansione attorno ad un angolo con $|\theta| > \nu_{max}$, e formazione di corrente slittante.

[3] Una tabella più completa si può trovare nel rif. 1 di pag. 171.

(*c*) **Urti obliqui ed espansioni sovrapposte.**

Se nel moto supersonico sovrapponiamo le soluzioni dell'urto obliquo e dell'espansione isentropica, possiamo ottenere l'andamento della corrente su forme abbastanza complesse. Essendo il moto supersonico non c'è influenza a monte ed è possibile "camminare" sul profilo e calcolare il moto lungo la via. In fig. 8-11 vediamo le correnti su alcuni corpi semplici; c'è anche l'andamento della pressione.

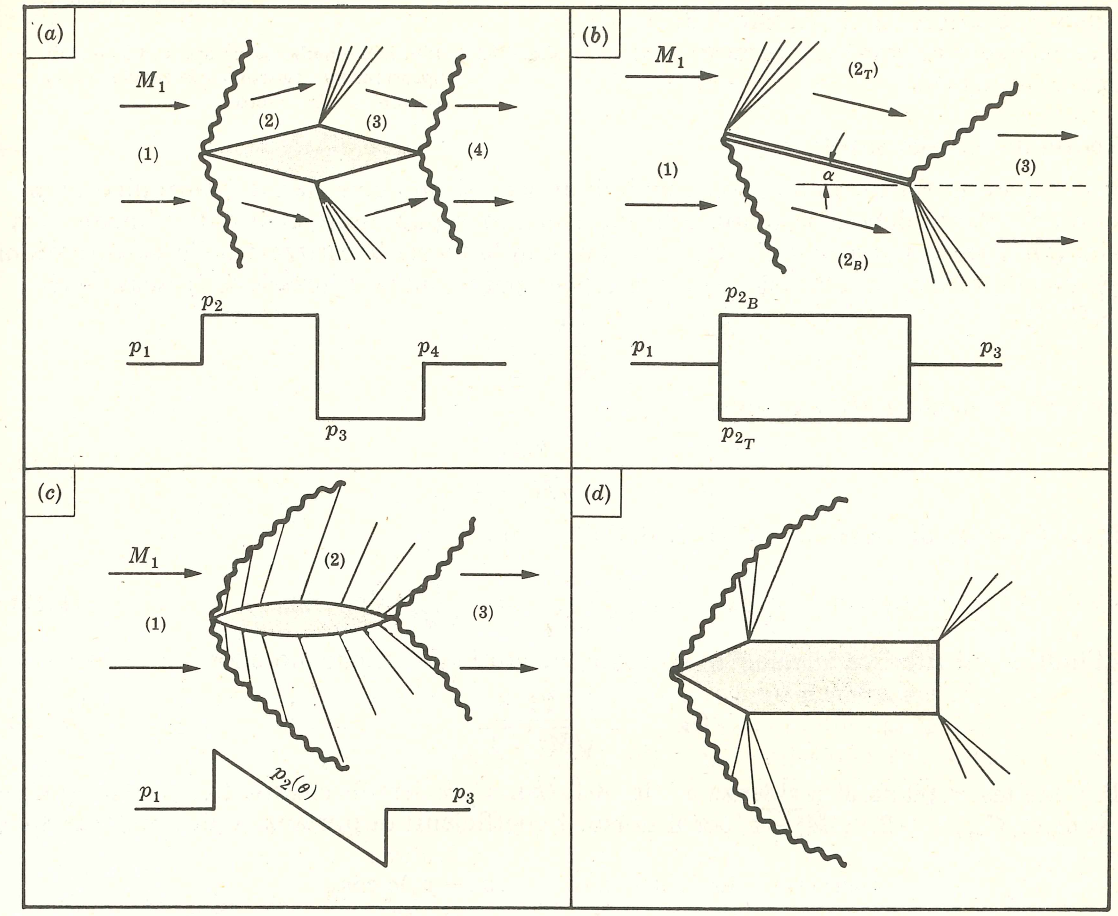


Fig. 8-11. Moto con onde di espansione e d'urto su corpi bidimensionali.

Il fluido che in fig. 8-11(*b*) scorre sul dorso e sul ventre della lastra inclinata deve finire subito dopo alla pressione e velocità della corrente libera. La temperatura tuttavia (e la densità) possono variare leggermente lungo una "superficie di contatto". Nella figura la pressione sul ventre aumenta lungo l'onda d'urto, mentre decresce sul dorso attraverso l'onda di espansione: ne risulta sulla lastra un'azione portante. Differentemente dal profilo portante subsonico, quello supersonico presenta una componente di questa forza di pressione nella direzione del moto. E' un'azione resistente, nota anche come "resistenza d'onda".

Nella pratica i velivoli supersonici sono dotati di ali che restano subsoniche, eliminando così la resistenza d'onda; si parla di ali subsoniche perché dotate di un angolo di freccia verso l'indietro che dà luogo ad una componente di velocità subsonica, normale al bordo d'attacco dell'ala.

(*d*) **Regioni semplici e non-semplici.**

Si sono discusse finora onde d'urto oblique semplici, ed onde isentropiche di espansione o

compressione. Nelle regioni in cui c'è l'interazione tra queste onde, che diventano curve (le caratteristiche non sono più delle linee rette), queste soluzioni semplici non sono più valide e bisogna risolvere le equazioni complete. Si tratta in genere di equazioni non lineari, ma in certi casi semplici, come nel moto attorno a corpi sottili, si possono linearizzare: discuteremo queste soluzioni nel paragrafo 8.3. In fig. 8-12 vediamo un esempio di moto non semplice in un ugello.

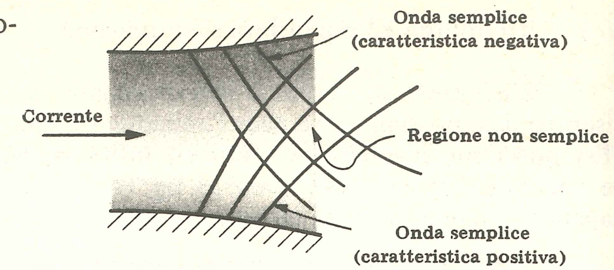


Fig. 8-12. Moto non semplice in un ugello. Le onde di espansione interagiscono, e le caratteristiche non sono più linee rette.

(*e*) **Teoria del profilo sottile.**

Il moto su profili sottili a deboli angoli di attacco si può considerare isentropico se gli urti sono abbastanza deboli: la teoria dell'urto-espansione può essere così notevolmente semplificata. (Otterremo più avanti gli stessi risultati con la teoria linearizzata delle perturbazioni). Per urti deboli, o onde di espansione la variazione approssimata di pressione si ricava dalle (*8.7*) e (*8.9*):

$$\frac{\Delta p}{p} \approx \frac{kM^2}{\sqrt{M^2-1}}\Delta\theta$$

e assumendo M simile a M_1 e p simile a p_1,

$$\frac{p-p_1}{p_1} \approx \frac{kM_1^2}{\sqrt{M_1^2-1}}\theta \tag{8.16}$$

Il coefficiente di pressione C_p viene definito come

$$C_p = \frac{p-p_1}{\frac{1}{2}\rho_1 V_1^2} = \frac{p-p_1}{\frac{1}{2}kp_1 M_1^2} = \frac{2}{kM_1^2}(p/p_1 - 1) \tag{8.17}$$

in cui l'indice 1 si riferisce ai valori in corrente indisturbata. Otteniamo allora dalle (*8.16*) e (*8.17*),

$$C_p = \frac{2\theta}{\sqrt{M_1^2-1}} \tag{8.18}$$

Per una lastra piana di incidenza α, fig. 8-11(*b*), C_p è semplicemente $C_{p_B} = +2\alpha/\sqrt{M_1^2-1}$ per il ventre, $C_{p_T} = -2\alpha/\sqrt{M_1^2-1}$ per il dorso. I coefficienti di portanza e di resistenza sono allora

$$C_L = \frac{\text{portanza per unità di lunghezza}}{\frac{1}{2}\rho_1 V_1^2 c} = \frac{(p_B - p_T)c\cos\alpha}{\frac{1}{2}\rho_1 V_1^2 c} = (C_{p_B} - C_{p_T})\cos\alpha$$

$$C_D = \frac{\text{resistenza per unità di lunghezza}}{\frac{1}{2}\rho_1 V_1^2 c} = \frac{(p_B - p_T)c\sin\alpha}{\frac{1}{2}\rho_1 V_1^2 c} = (C_{p_B} - C_{p_T})\sin\alpha$$

nelle quali c è la lunghezza della corda (larghezza del profilo). Essendo piccolo α, $\cos\alpha \approx 1$, $\sin\alpha \approx \alpha$, e abbiamo infine

$$C_L = \frac{4\alpha}{\sqrt{M_1^2-1}}, \quad C_D = \frac{4\alpha^2}{\sqrt{M_1^2-1}} \tag{8.19}$$

per la lastra piana a piccolo angolo d'incidenza α.

In generale si può dimostrare che i coefficienti di pressione per profili sottili si possono mettere in questa forma:

$$C_{p_T} = \frac{2}{\sqrt{M_1^2-1}}\left(\frac{df_T}{dx}\right), \quad C_{p_B} = \frac{2}{\sqrt{M_1^2-1}}\left(-\frac{df_B}{dx}\right) \tag{8.20}$$

in cui $f_T(x)$ e $f_B(x)$ sono rispettivamente le equazioni delle superfici del dorso e del ventre del profilo.

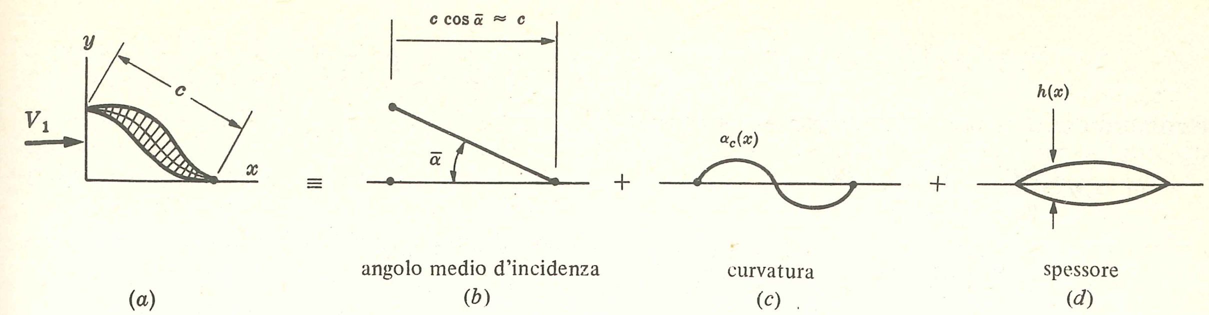


Fig. 8-13. Profilo sottile con piccolo angolo d'incidenza. Il profilo (*a*) può essere decomposto in (*b*), (*c*) e (*d*).

(Vedi fig. 8-13.) Con la (*8.20*) abbiamo le espressioni dei coefficienti C_L e C_D:

$$C_L = \frac{4\bar{\alpha}}{\sqrt{M_1^2-1}}, \quad C_D = \frac{4}{\sqrt{M_1^2-1}}\left[\overline{\left(\frac{dh}{dx}\right)^2} + (\bar{\alpha})^2 + \overline{\alpha_c^2(x)}\right] \tag{8.21}$$

in cui $h(x)$ è lo spessore del profilo, $\bar{\alpha}$ l'angolo di incidenza medio e $\alpha_c(x)$ l'angolo locale di incidenza della linea di curvatura rispetto alla linea dell'angolo medio di incidenza inclinata dell'angolo $\bar{\alpha}$, come si vede in fig. 8-13.

Possiamo ottenere questi stessi risultati con la teoria delle perturbazioni, che vedremo nel prossimo paragrafo.

8.3 PICCOLE PERTURBAZIONI. TEORIA LINEARIZZATA

(*a*) **Teoria delle perturbazioni.**

Se consideriamo un moto omentropico (tutto isentropico), cioè irrotazionale e senza attrito, e tale che h_0 resti sempre uguale, allora possiamo adottare la (*8.6*) come equazione di partenza. Non sono ammissibili gli urti: dobbiamo dunque limitarci ad urti deboli, virtualmente isentropici e a espansioni. Questo fisicamente vuol dire che gli oggetti su cui si verifica il moto debbono essere dei profili bidimensionali, o dei corpi cilindrici sottili che limitano l'intensità dell'urto. Possiamo esprimere matematicamente questa condizione dicendo che la velocità è ovunque prossima alla velocità di corrente indisturbata $\mathbf{V}_0$, o $\mathbf{V}_1$ come la si è chiamata nel paragrafo precedente. Con riferimento alla fig. 8-14, in ogni punto della corrente la velocità si definisce come valore in corrente indisturbata $\mathbf{V}_0$ più una piccola velocità di perturbazione $\mathbf{v}'$. Allora

$$\begin{aligned} u &= V_0 + u' & u'/V_0 &\ll 1 \\ v &= v' & v'/V_0 &\ll 1 \\ w &= w' & w'/V_0 &\ll 1 \end{aligned} \tag{8.22}$$

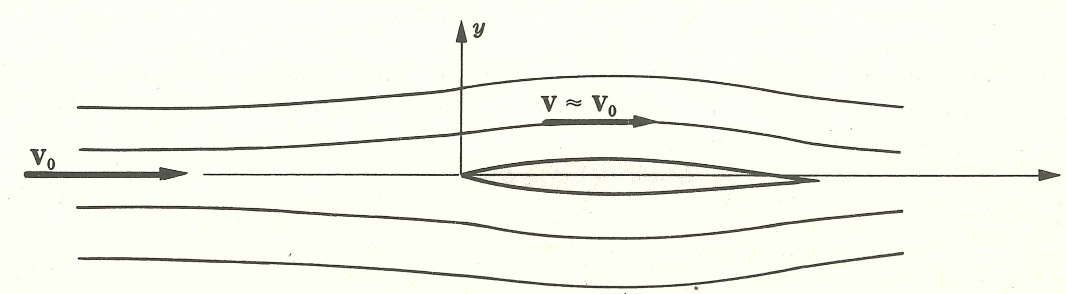


Fig. 8-14. Corpo sottile che altera una corrente uniforme dotata di $\mathbf{V}_0$.

Sostituendo nella forma tridimensionale dell'equazione (*8.5*) ed eliminando a^2 tramite l'equazione dell'energia di un gas perfetto, nella forma

$$\frac{(V_0+u')^2+v'^2+w'^2}{2}+\frac{a^2}{k-1} = \frac{V_0^2}{2}+\frac{a_0^2}{k-1} \qquad (8.23)$$

otteniamo l'equazione di perturbazione per velocità:

$$\begin{aligned}(1-M_0^2)\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}+\frac{\partial w'}{\partial z} \\ = M_0^2\left[(k+1)\frac{u'}{V_0}+\frac{k+1}{2}\frac{u'^2}{V_0^2}+\frac{k-1}{2}\frac{v'^2+w'^2}{V_0^2}\right]\frac{\partial u'}{\partial x} \\ + M_0^2\left[(k-1)\frac{u'}{V_0}+\frac{k+1}{2}\frac{v'^2}{V_0^2}+\frac{k-1}{2}\frac{w'^2+u'^2}{V_0^2}\right]\frac{\partial v'}{\partial y} \\ + M_0^2\left[(k-1)\frac{u'}{V_0}+\frac{k+1}{2}\frac{w'^2}{V_0^2}+\frac{k-1}{2}\frac{u'^2+v'^2}{V_0^2}\right]\frac{\partial w'}{\partial z} \\ + M_0^2\left[\frac{v'}{V_0}\left(1+\frac{u'}{V_0}\right)\left(\frac{\partial u'}{\partial y}+\frac{\partial v'}{\partial x}\right)+\frac{w'}{V_0}\left(1+\frac{u'}{V_0}\right)\left(\frac{\partial u'}{\partial z}+\frac{\partial w'}{\partial x}\right)\right. \\ \left.+\frac{v'w'}{V_0^2}\left(\frac{\partial w'}{\partial y}+\frac{\partial v'}{\partial z}\right)\right]\end{aligned} \qquad (8.24)$$

ed è un'equazione esatta. Se poniamo che u', v', w' siano $\ll V_0$, otteniamo l'equazione semplificata del secondo ordine

$$\begin{aligned}(1-M_0^2)\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}+\frac{\partial w'}{\partial z} \\ = M_0^2(k+1)\frac{u'}{V_0}\frac{\partial u'}{\partial x}+M_0^2(k-1)\frac{u'}{V_0}\left(\frac{\partial v'}{\partial y}+\frac{\partial w'}{\partial z}\right) \\ + M_0^2\frac{v'}{V_0}\left(\frac{\partial u'}{\partial y}+\frac{\partial v'}{\partial x}\right)+M_0^2\frac{w'}{V_0}\left(\frac{\partial u'}{\partial z}+\frac{\partial w'}{\partial x}\right)\end{aligned} \qquad (8.25)$$

utile in tutto il campo di variazione dei numeri di Mach, dal moto subsonico al transonico, al supersonico, all'ipersonico. Se poi conserviamo i soli termini del primo ordine otteniamo una forma lineare semplice, utile per il moto subsonico e supersonico ma non per il transonico, in cui $M \approx 1$, né per l'ipersonico in cui $M > 6$:

$$(1-M_0^2)\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}+\frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \qquad (8.26)$$

La (*8.25*) può essere semplificata per il moto transonico:

$$(1-M_0^2)\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}+\frac{\partial w'}{\partial z} = M_0^2(k+1)\frac{u'}{V_0}\frac{\partial u'}{\partial x} \qquad (8.27)$$

utile ancora, anzi migliore della (*8.26*) per i moti subsonici e supersonici: ma non è lineare. Conviene spesso esprimere le equazioni di perturbazione in funzione di un potenziale di velocità di perturbazione: $\mathbf{v}' = -\nabla\phi$. La (*8.26*) diventa

$$(1-M_0^2)\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0 \qquad (8.28)$$

e la (*8.27*)

$$(1-M_0^2)\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = -\frac{M_0^2(k+1)}{V_0}\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} \qquad (8.29)$$

La (*8.28*) è lineare, e si può risolvere facilmente per profili sottili in regime subsonico e supersonico. Per i bassi numeri di Mach, $(1-M_0^2) \approx 1$ e così $\nabla^2\phi = 0$ che è esattamente l'equazione usata nel capitolo 6, nel quale accettavamo l'ipotesi che la corrente fosse incompressibile

(e quindi $M \ll 1$). Ora possiamo discutere il moto subsonico compressibile, usando la (*8.28*); la forma di questa equazione passa da ellittica per il moto subsonico, nel quale $M < 1$ e l'influenza del corpo si risente in tutto il campo di velocità, a iperbolica nel moto supersonico, a $M > 1$; in quest'ultimo il corpo non può esercitare alcuna influenza a monte; le soluzioni sono dei disturbi a forma d'onda, che si propagano lungo le caratteristiche.

(*b*) **Il coefficiente di pressione nella teoria linearizzata.**

Il coefficiente di pressione definito dall'equazione (*8.17*) e la pressione p si possono scrivere in funzione delle componenti di $\mathbf{V}$ (usando l'equazione dell'energia):

$$C_p = \frac{2}{kM_1^2}\{[1+\tfrac{1}{2}(k-1)M_1^2(1-V^2/V_0^2)]^{k/(k-1)}-1\} \qquad (8.30)$$

Inserendo le velocità di perturbazione, sviluppando e conservando i termini del secondo ordine abbiamo

$$C_p = -\left[\frac{2u'}{V_0}+(1-M_0^2)\frac{u'^2}{V_0}+\frac{v'^2+w'^2}{V_0^2}\right] \qquad (8.31)$$

Nei moti piani e bidimensionali possiamo conservare solo i termini del primo ordine:

$$C_p = -\frac{2u'}{V_0} \qquad (8.32)$$

Per correnti su corpi cilindrici dovremo conservare il termine di secondo ordine:

$$C_p = -\frac{2u'}{V_0}-\frac{v'^2+w'^2}{V_0^2} \qquad (8.33)$$

(*c*) **Condizioni al contorno.**

Fisicamente la condizione al contorno è che il vettore velocità risulti tangente al corpo, sulla superficie del corpo stesso. Se quest'ultima è data dall'equazione

$$f(x,y,z) = 0$$

la condizione al contorno sarà

$$\mathbf{V}\cdot\nabla f = 0 \qquad (8.34)$$

Esplicitando la (*8.34*) in funzione di u', v', w' ricaviamo la condizione, esatta per un ordine consistente, per il moto bidimensionale nel piano xy (con piccola y)

$$v'(x, y=0) = V_0(dy/dx)_{\text{corpo}} \qquad (8.35)$$

Nel moto "piano" (che si ha nel caso di oggetti tridimensionali sottili, quasi piatti, come le ali) la corrente è quasi-bidimensionale e la condizione al contorno sulla superficie diventa

$$v'(x,0,z) = V_0(\partial y/\partial x)_{\text{corpo}} \qquad (8.36)$$

per la quale il corpo giace sul piano xz ed è quasi bidimensionale nel piano xy.

La situazione è più complicata nel moto attorno oggetti cilindrici sottili: nelle opere in riferimento se ne potrà trovare la trattazione.

Bisogna notare che la velocità $v'(x)$ è calcolata in $y = 0$ e non esattamente sulla superficie del corpo: è un'approssimazione congruente con l'ipotesi di corpo sottile.

(*d*) **Teoria del profilo sottile supersonico.**

La teoria delle perturbazioni che abbiamo appena esaminata può essere applicata ai profili sottili bidimensionali. Si ottengono risultati identici alle soluzioni per urto debole, già discusse nel paragrafo 8.2(*e*).

8.4 IL METODO DELLE CARATTERISTICHE

Nelle correnti complesse, per le quali la teoria dell'urto-espansione o quella linearizzata non sono adeguate, è necessario risolvere con metodi numerici le equazioni non lineari iniziali. Con il metodo delle caratteristiche abbiamo una semplificazione di dette equazioni nel campo supersonico, e ricaviamo una ben provata tecnica matematica facilmente adattabile all'analisi numerica.

(*a*) Equazioni ellittiche e iperboliche.

Le equazioni del moto subsonico sono ellittiche, quelle del supersonico sono iperboliche: nei due casi bisogna usare dei metodi di analisi numerica del tutto diversi. Nel moto subsonico, tutto il campo di corrente risente di qualsiasi disturbo: per risolvere le equazioni ellittiche bisogna usare il metodo del rilassamento; qui le condizioni al contorno debbono coprire tutto il confine del dominio che ci interessa, e bisogna controllare simultaneamente tutto il campo di corrente. Invece nel moto supersonico, di equazioni iperboliche, disturbi e informazioni si possono propagare solo verso valle; le condizioni al contorno vanno specificate solo lungo una curva collocata a monte. Si può allora "camminare" verso valle calcolando i valori lungo la via, senza dover ripercorrere il campo di corrente per tener conto di una condizione a valle, come nel caso del moto subsonico.

L'equazione iperbolica dà luogo a caratteristiche, ma non ne daremo qui un'esatta definizione matematica. Presentiamo in tabella alcune differenze tra equazioni ellittiche e equazioni iperboliche: ϕ è la variabile dipendente.

	Equazione ellittica		Equazione iperbolica
(1)	Per evitare delle singolarità, o ϕ o $\partial\phi/\partial n$ debbono essere assegnate su un confine chiuso.	(1)	ϕ o $\partial\phi/\partial n$ debbono essere specificate su un confine aperto. Se le condizioni sono espresse su un confine chiuso, possono risultarne delle singolarità.
(2)	Una variazione nelle condizioni di contorno influenza tutto il campo di corrente.	(2)	Una variazione nelle condizioni al contorno interessa solo un dominio limitato di corrente.
(3)	La soluzione dev'essere analitica.	(3)	La soluzione può non essere analitica (gli urti sono singolarità).

(*b*) Caratteristiche.

Non discuteremo qui la teoria matematica generale delle caratteristiche, né le equazioni differenziali iperboliche. Presenteremo piuttosto una semplice discussione delle caratteristiche dal punto di vista fisico nella gasdinamica bidimensionale, e ne esporremo brevemente il metodo di calcolo numerico.

Cominciamo con il considerare un moto omentropico bidimensionale permanente; con le sue equazioni non possiamo descrivere la struttura delle onde d'urto, perché queste ultime implicano delle trasformazioni irreversibili. Tuttavia, per certe condizioni al contorno, gli urti possono essere delle soluzioni ammissibili perché corrispondono a singolarità nella soluzione del sistema iperbolico. Il moto è dunque omentropico entro confini che non contengano urti, o che siano limitati da urti. Quando c'è l'urto, per localizzarlo può risultare necessario un procedimento per tentativi. Per esempio in un ugello convergente-divergente in condizioni di funzionamento critico, nel quale sia specificata la pressione all'ingresso e all'uscita, si può verificare un'onda d'urto a valle della gola. In questa zona il moto è supersonico e per seguire l'andamento della corrente si può usare il metodo delle caratteristiche. Però se volessimo semplicemente "camminare" verso valle fino all'uscita, la pressione finale potrebbe non essere quella voluta. Solo se ammettiamo un urto all'interno dell'ugello possiamo far sì che la pressione all'uscita corrisponda al valore prescritto. Quindi ogni volta che le condizioni al contorno sono troppo restrittive per il sistema di equazioni iperboliche, ne possono derivare delle singolarità (urti). Si può trattare anche di una limitazione fisica, naturalmente: non solo di natura matematica. Di solito il metodo delle caratteristiche

è più utile là dove non si verificano urti, quando siano specificate solo le condizioni al contorno su di una curva a monte. Così si può semplicemente "camminare" verso valle, facendo i conti lungo la via, senza ricorrere ad iterazioni o successive approssimazioni.

La (*8.28*) in funzione di ϕ,

$$(1-M_0^2)\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0$$

è ellittica se $M_0 < 1$, iperbolica se $M_0 > 1$. Di solito comunque non interessa applicare il metodo delle caratteristiche a questa semplice equazione linearizzata; sono più interessanti le equazioni non lineari complete. Consideriamo le equazioni generali (*8.5*):

$$(u^2-a^2)\frac{\partial u}{\partial x} + (v^2-a^2)\frac{\partial v}{\partial y} + uv\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Ci chiediamo: sotto quali condizioni possiamo ridurre queste equazioni a una forma che presenti una variazione monodimensionale, in un punto qualsiasi dello spazio? La variazione si verifica cioè solo nel senso normale alla caratteristica, e non tangenzialmente. Cerchiamo una condizione tale da poter mettere una combinazione delle equazioni ora viste nella forma

$$A\frac{\partial u}{\partial \alpha} + B\frac{\partial v}{\partial \alpha} = 0 \qquad (8.37)$$

in cui $\dfrac{\partial}{\partial\alpha} = \cos\chi\dfrac{\partial}{\partial x} + \sin\chi\dfrac{\partial}{\partial y}$. Sia $\tan\chi = \zeta$. Moltiplicando la prima delle (*8.5*) per λ_1 e la seconda per λ_2 e sommando, possiamo ottenere la forma (*8.37*), purché λ_1 e λ_2 soddisfino certe condizioni: esse sono

$$\frac{\lambda_2-\lambda_1 uv}{\lambda_1(a^2-u^2)} = \zeta, \qquad \frac{\lambda_1(v^2-a^2)}{(\lambda_2-\lambda_1 uv)} = \zeta$$

Eliminando λ_1 e λ_2 otteniamo

$$(a^2-u^2)\zeta^2 - 2uv\zeta + (a^2-v^2) = 0 \qquad (8.38)$$

La direzione α è definita da ζ, che esiste solo se

$$(u^2+v^2) > a^2; \qquad M > 1$$

ovvero, il moto è supersonico per $M > 1$. Le direzioni α definite da due radici della (*8.38*) sono le caratteristiche + e −, indicate con ζ_+ e ζ_-. Si può dimostrare che

$$\zeta_+\zeta_- = (a^2-v^2)/(a^2-u^2)$$

Trovando allora esplicitamente λ_1 e λ_2 è possibile dimostrare che se prendiamo $dy = \zeta_+ dx$ abbiamo $du = -\zeta_- dv$, e se assumiamo $dy = -\zeta_- dx$ allora $du = -\zeta_+ dv$. Arriviamo così alle relazioni equivalenti all'equazione differenziale originale (*8.5*):

$$\begin{aligned} &\text{su} \quad dy = \zeta_+ dx: \quad du = -\zeta_- dv \\ &\text{su} \quad dy = -\zeta_- dx: \quad du = -\zeta_+ dv \end{aligned} \qquad (8.39)$$

E' tuttavia più conveniente lavorare in coordinate polari: assumiamo $u = V\cos\theta$ e $v = V\sin\theta$, come in fig. 8-15, così che

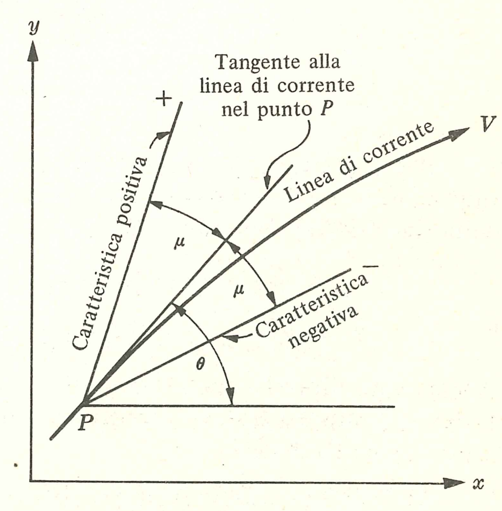


Fig. 8-15. Caratteristiche in un sistema di coordinate polari.

$$du = \cos\theta\, dV - V\sin\theta\, d\theta \qquad \text{e} \qquad dv = \sin\theta\, dV + V\cos\theta\, d\theta$$

Sostituendo nella (*8.39*) abbiamo rispettivamente sulle caratteristiche (+) e (−):

$$\frac{\cot\mu}{V}dV = +d\theta, \qquad \frac{\cot\mu}{V}dV = -d\theta \qquad (8.40)$$

e $\zeta_+ = \tan(\theta+\mu)$, $\zeta_- = \tan(\theta-\mu)$. Allora l'equazione dell'energia si può usare per esprimere V in funzione di M, e

$$\pm d\theta = \frac{\sqrt{M^2-1}\,dM}{M[1+\frac{1}{2}(k-1)M^2]} = d\nu(M)$$

che, integrata, ci dà $\nu(M)$. E allora dato che $\pm d\theta - d\nu = 0$, $(\nu-\theta)$ è costante su di una caratteristica (+), e $(\nu+\theta)$ è costante su una (−). Se allora sia ν che θ sono definite su una linea L-M, possiamo costruire un reticolo avanzando verso valle, trovando ν e θ sui punti d'intersezione. Una volta noti ν e θ, si possono trovare il numero di Mach, la direzione del moto e la velocità. Se ci riferiamo alla fig. 8-16(*a*), ν e θ sono definiti sul segmento L-M. Conosciamo allora la direzione delle caratteristiche da un insieme di punti arbitrari $A_1, \ldots, A_n$. Tracciamo le caratteristiche (+) e (−) per avere il primo insieme di intersezioni $B_1, \ldots, B_{n-1}$. In ognuno di questi punti sono noti $(\nu-\theta)$ e $(\nu+\theta)$, e si possono quindi esplicitare ν e θ e trovare μ, M, V, e tracciare la nuova direzione delle caratteristiche (±). Questo nuovo insieme di curve si interseca in $C_1, \ldots, C_{n-2}$. Il procedimendo prosegue in tutto il campo di influenza, limitato dalle caratteristiche passanti per A_1, A_n. Generalmente, in regioni non semplici le caratteristiche sono curve; i segmenti compresi tra le singole intersezioni sono considerati retti. Più fitta è la rete così costruita, più approssimata è la soluzione.

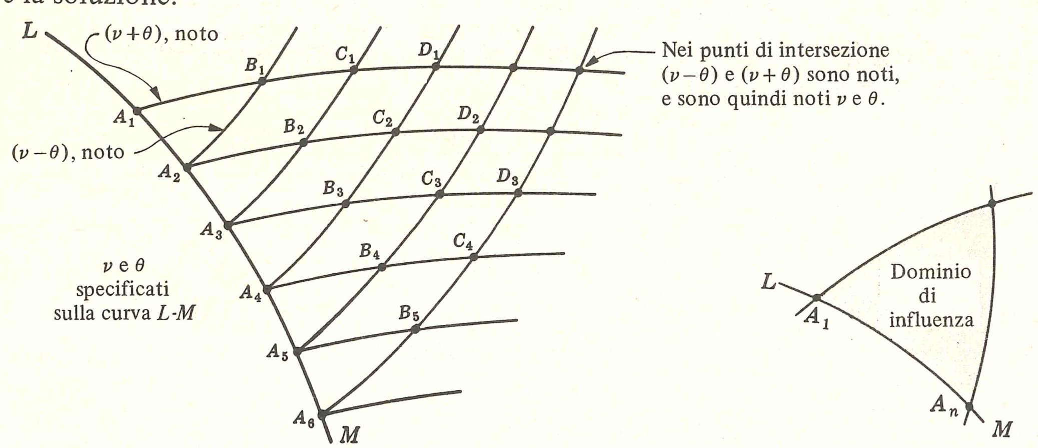


Fig. 8-16(*a*). Costruzione delle caratteristiche in coordinate polari.

Per illustrare con maggior dettaglio consideriamo in fig. 8-16(*b*) una zona ingrandita della fig. 8-16(*a*). Nel punto B_1,

$$\nu_3 = \tfrac{1}{2}(\nu_1+\nu_2) + \tfrac{1}{2}(\theta_1-\theta_2)$$

e

$$\theta_3 = \tfrac{1}{2}(\nu_1-\nu_2) + \tfrac{1}{2}(\theta_1+\theta_2)$$

Accettiamo l'ipotesi che i segmenti di caratteristica compresi tra i vari punti della rete siano segmenti di retta.

La teoria completa delle caratteristiche per moti compressibili esula dagli scopi di questo libro: il lettore troverà ottimi riferimenti in bibliografia.

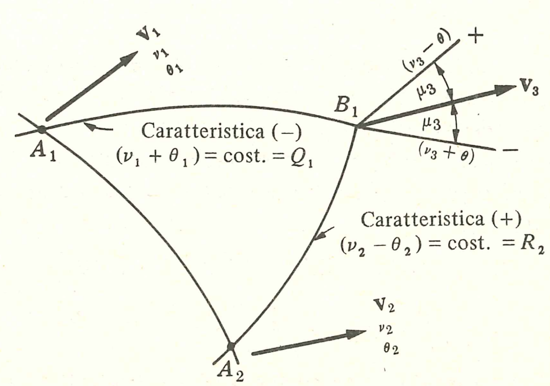


Fig. 8-16(*b*). Dettaglio del metodo di calcolo.

(*c*) **Velivoli supersonici.**

La resistenza d'onda di un'ala che vola in regime supersonico con formazione di onde d'urto e di espansione è in pratica molto maggiore di quella incontrata da un'ala che resta in regime subsonico. Si fa in modo allora che negli aerei supersonici le ali operino in regime subsonico: per questo l'angolo di freccia delle ali dev'essere maggiore dell'angolo di Mach. Così la componente di velocità normale al bordo d'attacco è subsonica, e il comportamento dell'ala è essenzialmente quello di un profilo subsonico. La fusoliera genera comunque un urto in prua, ma la resistenza di onda che ne consegue viene ridotta rastremando il naso a una forma molto aguzza, "punta d'ago", indebolendo così l'urto, e variando opportunamente la sezione trasversale della fusoliera (la classica forma della bottiglia di coca-cola).

Le ali sono corpi tridimensionali, e studiando le correnti su di esse bisogna tener conto di questo. Non ci fermeremo sui particolari, ma è importante ricordare che l'angolo di freccia fa sì che l'ala si comporti come un profilo subsonico dal punto di vista delle caratteristiche di portanza. Un effetto dell'aumento dell'angolo di freccia è di stabilizzare il velivolo, come accade nel caso del diedro alare positivo. In certe ali di forte freccia questo diedro risulta negativo, dando all'aereo un caratteristico aspetto di "ala stanca".

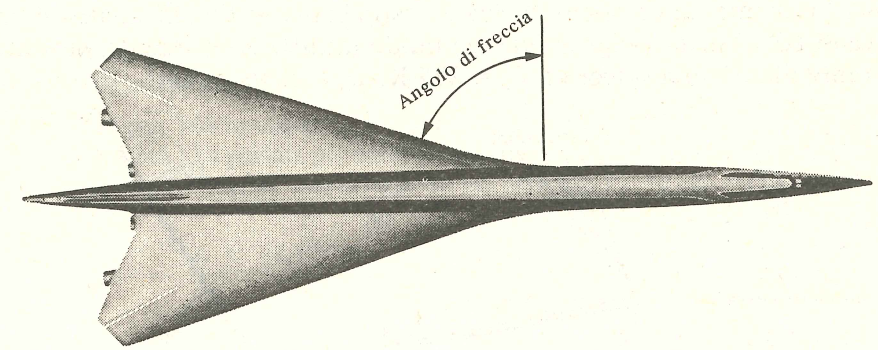


Fig. 8-17. Un moderno aereo supersonico. L'angolo di freccia è maggiore dell'angolo di Mach, in modo che la componente normale della velocità sul bordo d'attacco dell'ala è subsonica.

BIBLIOGRAFIA

1. Liepmann H. W., Roshko A., *Elements of Gasdynamics*, John Wiley, 1957.
2. Owczarek J. A., *Fundamentals of Gas Dynamics*, International Textbook, 1964.
3. Howarth L., (a cura di), *Modern Developments in Fluid Dynamics, High Speed Flow*, voll. 1 e 2, Oxford University Press, 1956.
4. Shapiro A. H., *The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow*, voll. 1 e 2, Ronald Press, 1952.
5. Nobile U., *Elementi di Aerodinamica*, Ministero dell'Aeronautica, Roma 1960.
6. Eula A., *Lezioni di Aerodinamica*, Università di Roma, 1958.

PROBLEMI RISOLTI

8.1. Aria a 290 K e a pressione atmosferica attraversa un'onda d'urto obliqua, inclinata come in fig. 8-18 di 50° rispetto alla direzione del moto. Il numero di Mach iniziale è 2. Trovare le condizioni a valle, e l'angolo di cui viene deviato il moto.

Vediamo in fig. 8-3 di pag. 159 che θ vale circa 18°. Dalle (*8.7*) di pag. 158 possiamo ricavare le condizioni a valle (punto 2) in funzione di quelle a monte (punto 1). Potremmo in alternativa usare le tabelle dell'urto normale, mettendo al posto dell'M_1 che compare in esse il nostro valore di $M_1 \sin \beta$, e al posto di M_2, $M_2 \sin (\beta - \theta)$. Troviamo allora:

$p_2/p_1 = 2{,}57$; $\quad p_2 = 2{,}57$ atm

$T_2/T_1 = 1{,}34$; $\quad T_2 = 389$ K

$M_2 \sin (\beta - \theta) = 0{,}69$; $\quad M_2 = 1{,}3$

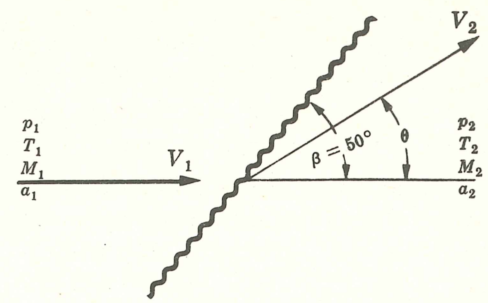


Fig. 8-18

8.2. In fig. 8-19 vediamo un profilo in forma di lastra piana sottile, inclinato ad un angolo di incidenza di 10°. Trovare le proprietà del fluido in tutte le regioni del moto. Si ha $M_1 = 3$, e in corrente libera l'aria si trova a $T_1 = 275$ K, $p_1 = 1{,}05$ kg/cm².

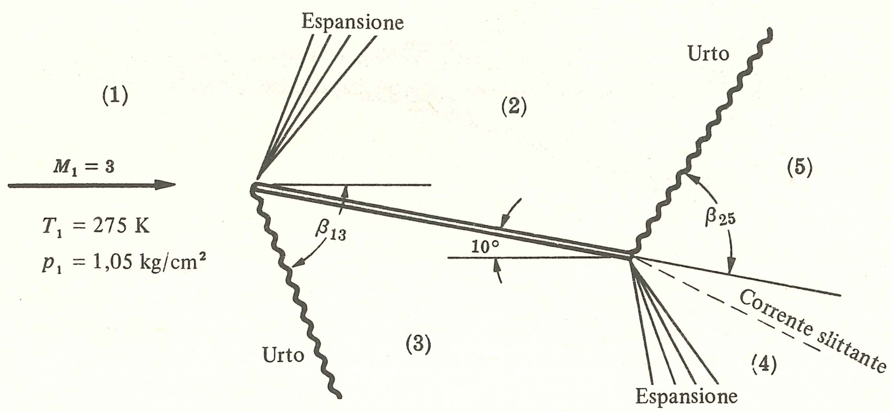


Fig. 8-19

Usando le (*8.7*) di pag. 158 e la fig. 8-3 di pag. 159 possiamo trovare le condizioni nella regione 3: $\beta_{13} = 27{,}5°$. Usando per l'aria $k = c_p/c_v = 1{,}4$ otteniamo

$$p_3/p_1 = 2{,}07, \quad p_3 = 2{,}17 \text{ kg/cm}^2; \quad M_3 = 2{,}49; \quad T_3 = 1{,}25 T_1 = 344 \text{ K}$$

Per trovare le condizioni nella regione 4, usiamo la

$$\nu_4 = \nu_3 + |\theta_4 - \theta_3| = \nu_3 + 10° = 39{,}1° + 10° = 49{,}1°$$

e dalla tabella 8.1 di pag. 162 abbiamo $M_4 = 2{,}97$. Dato che l'espansione è isentropica, scriviamo

$$p_4/p_3 = \left[\frac{2 + (k-1)M_3^2}{2 + (k-1)M_4^2}\right]^{k/(k-1)}$$

da cui $p_4/p_3 = 0{,}48$ e $p_4 = 1{,}04$ kg/cm². Ricaviamo T_4 dalla

$$T_4/T_3 = (p_4/p_3)^{(k-1)/k}$$

e quindi $T_4 = 0{,}81(T_3) = 0{,}81(1{,}25 T_1) = 1{,}01 T_1$.

Procedendo adesso lungo la superficie dorsale della lastra, troviamo le condizioni nella regione 2.

$$\nu = \nu_1 + 10° = 49{,}8° + 10° = 59{,}8°$$

da cui $M_2 = 3{,}57$. Dalle relazioni isentropiche abbiamo

$$p_2 = 0{,}44\, p_1 = 0{,}462 \text{ kg/cm}^2, \quad T_2 = 0{,}79\, T_1$$

Allora attraverso l'urto e fino alla regione 5 abbiamo

$$\beta_{25} = 24°, \quad M_5 = 2{,}98, \quad p_5 = 2{,}29 p_2 = 1{,}01 p_1, \quad T_5 = 1{,}29 T_2 = 1{,}02 T_1$$

Vediamo che le pressioni p_5 e p_4 sono dello stesso ordine di grandezza ma non uguali; lo stesso accade per T_5 e T_4. In realtà dal bordo d'uscita del profilo si deve estendere una corrente slittante, o superficie di contatto, che separa le regioni a temperatura e densità differenti: ma le pressioni p_4 e p_5 debbono essere uguali. Attraverso questa superficie inoltre le velocità risultano diverse, e ne risulta uno strato sollecitato a taglio. L'inclinazione esatta della superficie di discontinuità, che rende $p_4 = p_5 = p_1$, si può trovare per tentativi.

Portanza e resistenza per unità di superficie alare sono

$$L = (p_3 - p_2) \cos 10° = 1{,}69 \text{ kg/cm}^2, \quad D = (p_3 - p_2) \sin 10° = 0{,}30 \text{ kg/cm}^2$$

Notiamo che essendo quasi uguali p_5 e p_1, la superficie di contatto esce dal profilo quasi parallela alla direzione della corrente indisturbata. Per assicurare $p_5 = p_1$, come dev'essere in realtà, la superficie di contatto può in genere essere inclinata di un piccolo angolo rispetto alla corrente libera.

8.3. Trovare portanza e resistenza per il profilo visto nel problema precedente usando la teoria dell'ala sottile; confrontare con la soluzione esatta che tien conto dell'urto-espansione.

Con la (*8.19*) di pag. 164 troviamo C_L e C_D: $C_L = 0{,}247$ e $C_D = 0{,}043$. ($M_1 = 3$; α è misurato in radianti: 10° = 0,1745 rad.) La portata per unità di superficie è $\frac{1}{2}\rho_1 V_1^2 C_L$, ovvero $\frac{1}{2} k M_1^2 p_1 C_L$. Conoscendo T_1 e p_1 troviamo $\rho_1 = 1{,}304$ kg/m³ con la legge dei gas perfetti; $V_1 = a_1 M_1 = (333$ m/s$)(3) = 999$ m/s.

$$L = \tfrac{1}{2}\rho_1 V_1^2 C_L = \tfrac{1}{2}\,\frac{1{,}304}{9{,}8}(999)^2 \times 0{,}247 = 16.500 \text{ kg/m}^2 = 1{,}65 \text{ kg/cm}^2$$

e

$$D = \tfrac{1}{2}\rho_1 V_1^2 C_D = 0{,}29 \text{ kg/cm}^2$$

Confrontiamo questi risultati con quelli del problema precedente: siamo fuori di meno del 5%.

8.4. Con la teoria dell'urto-espansione, trovare l'andamento della corrente sul profilo bidimensionale a doppio cuneo di fig. 8-20. Il numero di Mach in corrente indisturbata è 2.

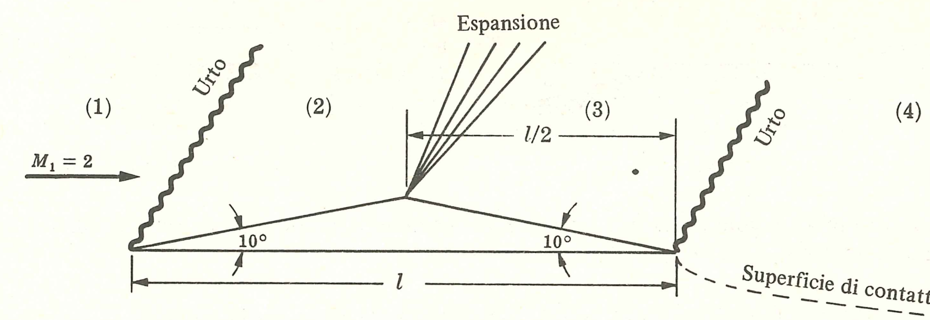


Fig. 8-20

Dal bordo d'uscita si estende una superficie di contatto; dobbiamo trovare l'esatto angolo che quest'ultima forma con la corrente indisturbata, imponendo la condizione che la pressione in 4 sia uguale a quella in 1. Ciò comporterebbe una leggera deviazione della corrente indisturbata verso il basso sul bordo d'uscita: per il momento però trascuriamo questo effetto, e assumiamo che il moto verso il basso sia indisturbato.

Per il moto 1-2 attraverso l'urto frontale, $\theta = 10°$, e dalla fig. 8-3 di pag. 159, $\beta = 39{,}5°$. Dalle tabelle o dalle equazioni (*8.7*) di pag. 158 abbiamo

$$p_2/p_1 = 1{,}72, \quad T_2/T_1 = 1{,}17, \quad M_2 = 1{,}63$$

E avremo allora, attraverso il ventaglio dell'espansione 2-3:

$$\nu_2 = 15{,}9°, \quad \nu_3 = \nu_2 + 20° = 35{,}9°, \quad M_3 = 2{,}37$$

$$p_3/p_2 = \left[\frac{2+(k-1)M_2^2}{2+(k-1)M_3^2}\right]^{k/(k-1)} = 0{,}32, \qquad T_3/T_2 = (p_3/p_2)^{(k-1)/k} = 0{,}72$$

Attraverso l'urto 3-4, $\theta = 10^\circ$ e $\beta = 34^\circ$, e

$$p_4/p_3 = 1{,}88, \quad T_4/T_3 = 1{,}21, \quad M_4 = 1{,}90$$

Evidentemente allora $p_4 = 1{,}03p_1$, e la corrente non può lasciare il profilo in direzione parallela a quella della corrente indisturbata, se no p_4 non sarebbe uguale a p_1. Allora l'urto 3-4 dovrà verificarsi con un angolo di deviazione di poco meno di 10°; il moto nella zona inferiore risulta in leggera compressione attraverso l'onda d'urto. Per tentativi si può trovare l'angolo vero della superficie di contatto, tale che sia $p_4 = p_1$. Lasciamo come esercizio al lettore lo sviluppo dei particolari.

8.5. Un'onda d'urto, che colpisce la parete di fig. 8-21, viene riflessa in tal modo che la direzione della corrente finisce per essere parallela alla parete stessa. La riflessione dell'urto sia come in figura.

Per $\theta = 10^\circ$ ed $M_1 = 3$, troviamo dalla (8.7) o dalle relative tabelle $\beta_1 = 28^\circ$ e $M_2 = 2{,}5$. Allora per $\theta_2 = 10^\circ$ ed $M_2 = 2{,}5$ ricaviamo $\beta_2 = 32^\circ$. Ricordarsi di entrare nelle tabelle standard degli urti normali con $M_1 \sin\beta_1$ invece di M_1, e con $M_2 \sin(\beta_1 - \theta)$ invece di M_2.

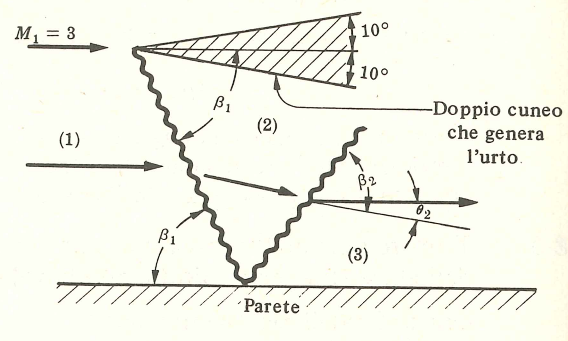


Fig. 8-21

PROBLEMI SUPPLEMENTARI

8.6. L'aria scorre sullo spigolo di fig. 8-22; trovarne le proprietà, e il numero di Mach a valle. Tracciare il ventaglio d'espansione. Cosa accade se l'angolo θ diventa sempre più grande?

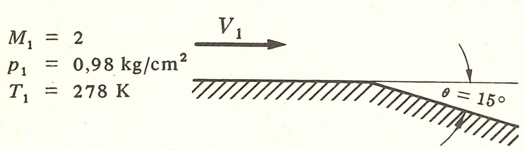


Fig. 8-22

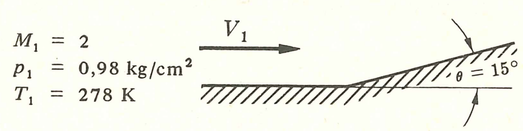


Fig. 8-23

8.7. L'aria scorre sullo spigolo di fig. 8-23; trovarne le proprietà, e il numero di Mach a valle. Cosa accade all'aumentare di θ?

8.8. Trovare la forma dell'urto sul cuneo di fig. 8-24, colpito da aria standard a mach 5.

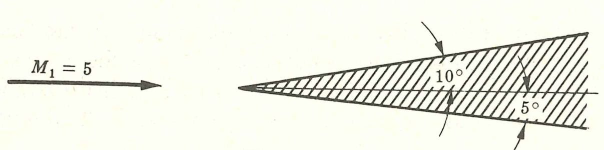


Fig. 8-24

8.9. Trovare le proprietà a valle, e mettere in diagramma l'angolo di Mach μ in funzione di θ per la corrente di fig. 8-25.

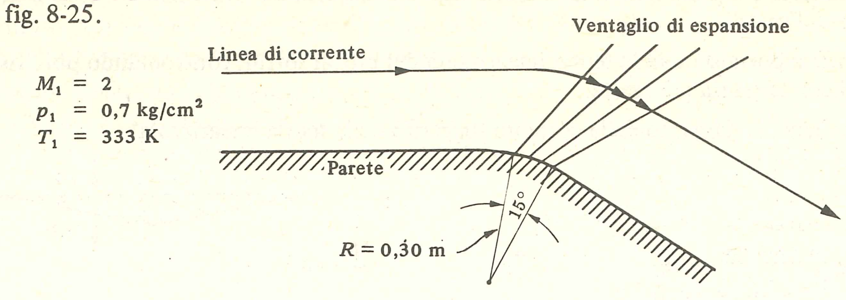


Fig. 8-25

8.10. Attorno al gomito di fig. 8-26 si ha una corrente bidimensionale; trovare il gomito a valle che non dia riflessione d'urto. Qual è la larghezza D_2?

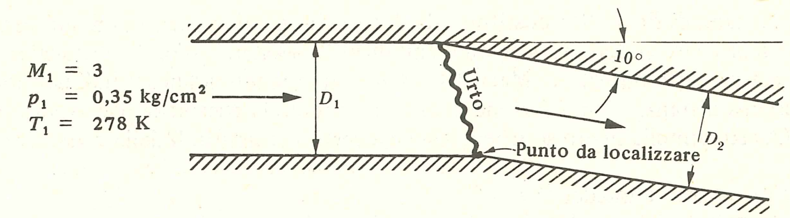


Fig. 8-26

8.11. Come nel problema 8.10, abbiamo in fig. 8-27 una curva in espansione. Indicare la forma della parete superiore, per la quale l'onda di espansione non è riflessa. (*Traccia*: Questa forma segue una linea di corrente lungo la curva.) Come si esprime D_2 in funzione dei parametri fondamentali?

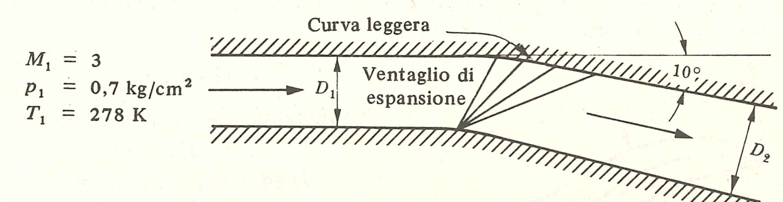


Fig. 8-27

8.12. Cosa accade nel problema 8.5, nel quale l'urto è riflesso, se l'angolo β_1 del primo urto diventa sempre più grande? La corrente può tornare parallela alla parete con una semplice riflessione, o succede qualcosa di strano?

8.13. Una corrente percorre la superficie a forma triangolare di fig. 8-28: trovarne l'andamento per $M_1 > 1$ con la teoria linearizzata delle piccole perturbazioni (assumendo $\epsilon \ll \lambda$).

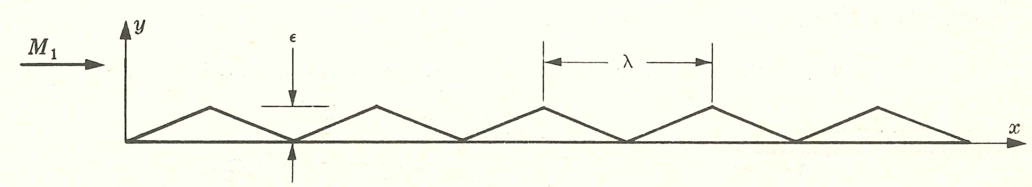


Fig. 8-28

8.14. Il profilo regolare, a forma di diamante, di fig. 8-29 è inclinato di un angolo di 10° rispetto ad una corrente supersonica a mach 2. L'angolo di cuneo del profilo è di 20°: dorso e ventre sono orizzontali.

Calcolare la portanza sul profilo tramite la teoria dell'urto-espansione, tracciando le zone d'urto. Quanto vale la resistenza d'onda?

Calcolare ancora la portanza con la teoria linearizzata dei profili sottili, confrontando poi i risultati con quelli ottenuti con la teoria più esatta.

A che cosa somiglia l'andamento della corrente suggerito dalla teoria linearizzata?

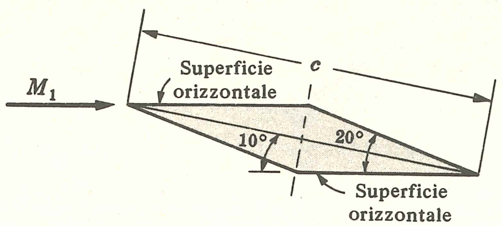


Fig. 8-29

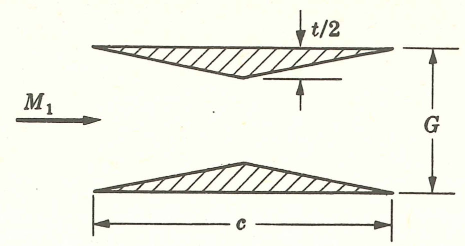
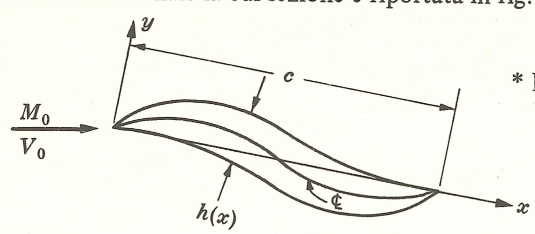


Fig. 8-30

8.15. Il biplano di Busemann di fig. 8-30 è costituito da due profili paralleli, ognuno di un mezzo diamante; ad angolo d'incidenza zero si può praticamente annullare la resistenza d'onda, distanziando correttamente i profili per un certo numero di Mach M_1. Adottiamo la teoria lineare bidimensionale ($t \ll c$) e troviamo la massima distanza G, in funzione di M_1, che annulli la resistenza per un angolo di incidenza uguale a zero. Questo annullamento si ottiene anche a certi sottomultipli della massima distanza critica G.
Esiste portanza per angolo d'incidenza zero?
C'è annullamento della resistenza d'onda se l'angolo di incidenza cambia, mantenendo costanti M_1 e G?

8.16. Trovare i coefficienti di portanza e di resistenza per il profilo dalla sezione trasversale a forma di mezzo diamante, visto nel problema 8-4. Discutere la natura della superficie di contatto nella teoria dei profili sottili.

8.17. Trovare con la teoria dei profili sottili l'andamento della corrente, e i coefficienti di portanza e resistenza, sul profilo bidimensionale la cui sezione è riportata in fig. 8-31.



$h(x) = H \sin \pi x/c$

* Equazione dell'asse di simmetria:

$y = Y \sin 2\pi x/c$

H ed $Y \ll c$. $\bar{\alpha}$ è noto.

Fig. 8-31

8.18. Con l'aiuto della teoria del profilo sottile, tracciare il diagramma di C_L e C_D in funzione di M per un profilo sottile e piano bidimensionale, dotato di un angolo di incidenza di 5°.

8.19. Tracciare lo stesso diagramma del problema 8.18, assumendo $M = 2$ e tracciando C_L e C_D in funzione dell'angolo d'incidenza.

8.20. Trovare la superficie di contatto per la corrente che si espande attorno all'angolo aguzzo di fig. 8-32.

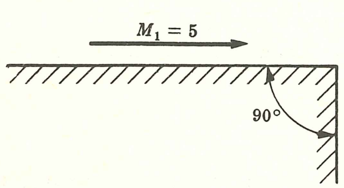


Fig. 8-32

$h = t(1 - x^2/c^2)$
$t/c = 0{,}05$

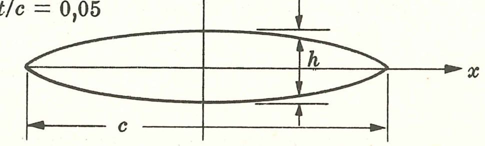


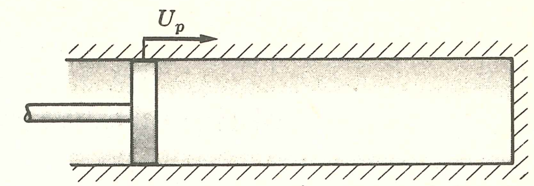
Fig. 8-33

8.21. Tracciare il diagramma di C_L in funzione di C_D per il profilo sottile che ha la forma di fig. 8-33. (Trattare $\bar{\alpha}$ come variabile indipendente, M come costante). t è lo spessore massimo; il profilo è simmetrico su dorso e su ventre.

8.22. Il cilindro di fig. 8-34 è chiuso ad una estremità, e contiene uno stantuffo che viene bruscamente messo in moto, a velocità costante, verso l'estremità chiusa. Nasce allora un'onda d'urto che giunge a detta estremità e viene poi riflessa verso lo stantuffo.

Trovare la velocità dell'onda d'urto prima e dopo la riflessione, e le pressioni in ogni istante, in tutto il campo di corrente. Dare una breve spiegazione qualitativa di quel che accade dopo che l'urto è stato riflesso dalla faccia dello stantuffo.

L'aria nel cilindro si trova inizialmente a pressione atmosferica e a 290 K. Lo stantuffo si muove alla velocità costante di 30 m/s.
Traccia. Rivedere il capitolo 7.



$U_p = 30$ m/s (velocità dello stantuffo)

Fig. 8-34

8.23. Trovare nei problemi 8.1 e 8.2 la velocità dell'aria nelle varie zone interessate dal moto.

NOMENCLATURA USATA NEL CAPITOLO 8

a = velocità del suono
c = lunghezza della corda (profondità del profilo)
c_p = calore specifico a pressione costante
c_v = calore specifico a volume costante
C_D = coefficiente di resistenza
C_L = coefficiente di portanza
C_P = coefficiente di pressione
D = resistenza
h = entalpia specifica
h_0 = entalpia specifica totale (o di ristagno)
k = rapporto dei calori specifici, c_p/c_v
L = portanza
M = numero di Mach
M_0 = numero di Mach nella corrente indisturbata
p = pressione
s = entropia specifica
u = componente della velocità secondo le x
u' = componente secondo le x della velocità di perturbazione
v = componente della velocità secondo le y
v' = componente secondo le y della velocità di perturbazione
$\mathbf{V}$ = vettore velocità
V_0 = velocità in corrente indisturbata
w = componente della velocità secondo le z
w' = componente secondo le z della velocità di perturbazione
α = angolo d'incidenza
β = angolo d'urto
θ = angolo di deflessione
μ = angolo di Mach
ν = funzione di Prandtl-Meyer
ρ = densità
ϕ = potenziale di velocità

CAPITOLO 9

Moto turbolento incompressibile

9.1 INTRODUZIONE

Anche se abbiamo già considerato dei moti turbolenti (buona parte del capitolo 5 era dedicato ai moti turbolenti, e diversi risultati ottenuti nei capitoli 7 e 8 valgono anche per questi ultimi) considereremo piú attentamente in questo capitolo l'importante problema del moto turbolento dei fluidi.

Potremmo disporre i problemi che riguardano il moto dei fluidi, dal meno difficile al piú complicato, nel modo seguente: moto potenziale → moto viscoso laminare → moto turbolento. I primi lavori in questo campo sono stati dedicati essenzialmente al moto potenziale e a quello laminare, e ben piccola parte della ricerca veniva dedicata ai difficili problemi del moto turbolento. E' stato un peccato, perché la maggior parte delle correnti che si incontrano nella ingegneria sono turbolente; comunque negli anni passati la ricerca sui moti turbolenti è sensibilmente migliorata. Si tratta di problemi ben lontani dall'essere risolti, e li avremo davanti per molto tempo ancora.

Prima di andare avanti dobbiamo rispondere a due domande: Cos'è il moto turbolento? dove si verifica? Il moto turbolento di un fluido è stato definito da Hinze (rif. 3 a pag. 192) come "una irregolare condizione del moto, nella quale diverse grandezze (per esempio la velocità e la pressione) mostrano una variazione casuale nel tempo e nello spazio, tanto da poterne distinguere dei valori medi, statisticamente diversi tra loro". Questo tipo di moto predomina nella maggior parte delle correnti che si incontrano in natura: quando oggetti come le navi, le automobili, gli aerei, le navicelle spaziali si muovono attraverso un fluido, il moto è quasi sempre turbolento. E in esso si vede sempre un moto fluttuante, sovrapposto al moto principale, o medio.

Si riscontra la turbolenza anche quando un fluido si muove attraverso delle strozzature come i ventilatori, le pompe, le condutture, i tubi. Criterio fondamentale per sapere se il moto sarà turbolento è la grandezza del numero di Reynolds, come già visto nel capitolo 5.

Noi stiamo cercando (1) una verifica fisica e (2) una descrizione quantitativa del moto turbolento dei fluidi. La prima è fortemente basata (anche se non del tutto, naturalmente) sull'esperimento, mentre la seconda deve servirsi di modelli matematici. Entrambe sono importanti per l'ingegnere.

Vi sono due approcci del tutto diversi per descrivere e spiegare il moto turbolento: (1) fenomenologico, (2) statistico. Nel primo viene fissata un'espressione dello sforzo di taglio in funzione di qualche coefficiente empirico di scambio; nel secondo viene studiata l'equazione del moto, applicata a grandezze mediate nel tempo.

9.2 EQUAZIONI DELLA VELOCITA' MEDIA

Le equazioni di distribuzione della velocità media sono state ricavate, per i moti turbolenti, nel paragrafo 5.2(*d*) a pag. 81. Li riassumiamo per comodità; il lettore può ritornare al capitolo 5 per la definizione dei simboli.

(*a*) **Legge della potenza:**

$$u/U = (y/\delta)^{m/(2-m)} = (y/\delta)^{1/n} \qquad (5.13)$$

Qui y è la distanza dalla parete, δ lo spessore dello strato limite, U la velocità in corrente indisturbata, u la velocità nello strato limite. La legge della potenza va bene per un moto che presenti un gradiente di pressione trascurabile su di una lastra piana. Vale anche per il moto a regime in una tubazione. L'esponente varia poco con il numero di Reynolds.

(*b*) **Forma logaritmica della Legge della parete:**

$$u/u_\tau = 2{,}44 \ln (yu_\tau/\nu) + 4{,}9 \qquad (5.16)$$

in cui u_τ è la velocità d'attrito, $\sqrt{\tau_0/\rho}$, e τ_0 lo sforzo di taglio in parete. L'equazione è valida nella maggior parte dello strato limite, ma non vale per la piccola regione a contatto della parete ($0 < yu_\tau/\nu < 50$) e nella parte più esterna dello strato limite stesso. Vale per un gradiente di pressione non nullo, ma la zona in cui essa è definita si riduce al crescere di detto gradiente.

(*c*) **Forma logaritmica della Legge del salto di velocità:**

$$(U-u)/u_\tau = -2{,}44 \ln (y/\delta) + 2{,}5 \qquad (5.17)$$

Equazione che si applica alla parte intermedia dello strato limite, per gradienti di pressione nulli o moderati. La u delle precedenti equazioni (*5.13*), (*5.16*) e (*5.17*) indica, come nel capitolo 5, la velocità mediata nel tempo in un moto turbolento permanente; nel resto del capitolo indicheremo i valori medi con una lineetta (p. es. $\bar{u}$).

9.3 METODO STATISTICO

(*a*) **Velocità turbolente. Media.**

Consideriamo il moto turbolento in una tubazione; se scegliamo un certo punto del moto e osserviamo la velocità in quel punto in funzione del tempo, otteniamo l'andamento statistico di fig. 9-1. Definiamo la velocità media nel tempo $\bar{u}$ come

$$\bar{u} \equiv \frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} u\,dt \qquad (9.1)$$

in cui T_1 è un tempo abbastanza grande perché $\bar{u}$ resti la stessa per un altro periodo anche piú grande nel moto medio permanente. La lineetta posta sulla grandezza indica la media temporale del tipo indicato dall'equazione (*9.1*). La velocità istantanea u si può scrivere in funzione di una velocità $\bar{u}$ mediata nel tempo, detta velocità media, e di una velocità fluttuante $\bar{u}'$ ($u = \bar{u} + u'$.)

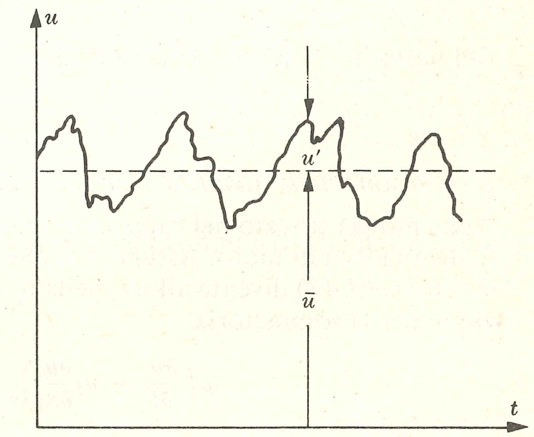


Fig. 9-1. La velocità in funzione del tempo, in un punto di una corrente turbolenta. u' è una grandezza statistica, sovrapposta alla velocità media $\bar{u}$.

Avremo bisogno nel prossimo paragrafo di combinare in vari modi delle grandezze fluttuanti; in queste operazioni ci aiuterà il seguente insieme di regole. Se a e b sono delle grandezze fluttuanti e c è una costante, valgono le seguenti regole (regole di Reynolds per le medie):

$$\overline{a+b} = \bar{a} + \bar{b}$$
$$\overline{c\bar{a}} = c\bar{a}$$
$$\overline{ab} = \bar{a}\bar{b} + \overline{a'b'}$$
$$\overline{\frac{\partial a}{\partial x}} = \frac{\partial \bar{a}}{\partial x}$$

in cui $a = \bar{a} + a'$, $b = \bar{b} + b'$. (Il valor medio di una fluttuazione è zero, $\bar{a}' = \bar{b}' = 0$).

(*b*) **Equazioni del moto turbolento.**

Sviluppiamo ora le equazioni del moto nel caso di corrente turbolenta: il metodo è lo stesso in ogni caso. Prima si scrivono le equazioni per le grandezze istantanee; si prende poi la media temporale di ambo i membri, notando che se l'uguaglianza è valida per un istante, essa è anche valida per la media su un certo periodo di tempo. Semplifichiamo infine le equazioni, in modo che compaiano solo le grandezze mediate rispetto al tempo.

(i) *L'equazione di continuità nel moto turbolento.*

La forma differenziale dell'equazione di continuità ricavata nel capitolo 3 è (in forma di tensore cartesiano)

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0 \qquad (3.30)$$

con ρ densità ed u_i componente i-ma della velocità. Questa equazione è valida nel moto turbolento, e le variabili dipendenti (ρ ed u_i) rappresentano delle quantità fluttuanti istantanee. Prendendo le medie temporali dei vari termini abbiamo:

$$\overline{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i)} = 0$$

Sostituendo poi le medie alle quantità istantanee, aggiungendo la parte fluttuante e applicando le regole delle medie di Reynolds già viste nel paragrafo precedente, otteniamo

$$\frac{\partial\bar\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\bar\rho\bar u_i) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{\rho' u_i'}) = 0 \qquad (9.2)$$

Nel moto incompressibile la (*9.2*) diventa

$$\frac{\partial\bar u_i}{\partial x_i} = 0 \qquad (9.3)$$

(ii) *L'equazione della quantità di moto nel moto turbolento.*

Abbiamo già trovato nel capitolo 3 (equazione (*3.47*)) la forma differenziale dell'equazione della quantità di moto. Assumiamo che il moto sia incompressibile, e che la viscosità sia costante; la (*3.47*) diventa allora, nella notazione dei tensori cartesiani e con la solita convenzione per la sommatoria,

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\partial x_j} + B_i \qquad (9.4)$$

in cui B_i è la forza di massa e μ la viscosità. E' un'equazione che si accetta per valida sia nel moto turbolento che in quello laminare; nel primo tuttavia le variabili dipendenti sono tutte funzioni del tempo: non sono delle quantità mediate, quali sono quelle ricavate da misure con il tubo di Pitot. Passiamo ora a fissare le equazioni in funzione di grandezze mediate nel tempo.

Sostituiamo $u_i = \bar u_i + u_i'$ e $p = \bar p + p'$ nell'equazione (*9.4*). Abbiamo

$$\rho\left[\frac{\partial(\bar u_i + u_i')}{\partial t} + (\bar u_j + u_j')\frac{\partial}{\partial x_j}(\bar u_i + u_i')\right] = B_i - \frac{\partial(\bar p + p')}{\partial x_i} + \mu\frac{\partial^2(\bar u_i + u_i')}{\partial x_j\partial x_j}$$

Semplificando e prendendo la media nel tempo di ambo i membri abbiamo

$$\rho\left(\frac{\partial\bar u_i}{\partial t} + \bar u_j\frac{\partial\bar u_i}{\partial x_j} + \overline{u_j'\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}}\right) = -\frac{\partial\bar p}{\partial x_i} + \mu\frac{\partial^2\bar u_i}{\partial x_j\partial x_j} + \bar B_i \qquad (9.5)$$

Il terzo termine del primo membro dell'equazione (*9.5*) si scrive di solito in una forma differente. Dall'equazione di continuità per il moto incompressibile abbiamo $\partial u_j'/\partial x_j = 0$. Così

$$u_i'\frac{\partial u_j'}{\partial x_j} = 0 \quad \text{e} \quad \overline{u_i'\frac{\partial u_j'}{\partial x_j}} = 0$$

Aggiungendo allora $\overline{u_i'\frac{\partial u_j'}{\partial x_j}}$ (cioè zero) ad ambo i membri della (*9.5*) abbiamo

$$\overline{u_j'\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + u_i'\frac{\partial u_j'}{\partial x_j}} = \frac{\partial}{\partial x_j}\overline{u_i'u_j'}$$

e la (*9.5*) diventa (con il termine turbolento a destra)

$$\rho\left(\frac{\partial\bar u_i}{\partial t} + \bar u_j\frac{\partial\bar u_i}{\partial x_j}\right) = -\frac{\partial\bar p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu\frac{\partial\bar u_i}{\partial x_j} - \rho\overline{u_i'u_j'}\right) + \bar B_i \qquad (9.6)$$

La (*9.6*) è l'equazione della quantità di moto nel caso del moto turbolento, espressa con termini mediati nel tempo. Differisce da quella per le grandezze istantanee (*9.4*) solo per l'aggiunta dell'ultimo termine, indicato spesso con il nome di sforzi di Reynolds, o sforzi turbolenti. L'equazione del moto turbolento scritta in questo modo è in apparenza la stessa che nel moto laminare, a parte un termine aggiuntivo che a rigore non esprime uno sforzo ma un effetto d'inerzia (o scambio di quantità di moto) che, come possiamo ricordare, deriva dal primo membro dell'equazione. Lo si indica con il termine di sforzo solo per il modo in cui viene modificata l'equazione del moto laminare.

(iii) *Equazione dell'energia per il moto turbolento.*

Partendo dall'equazione della quantità di moto per un fluido a viscosità costante e densità costante, cioè la (*9.4*), moltiplichiamo per u_i e semplifichiamo, ottenendo

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u_iu_i}{2}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left[u_i\left(\frac{p}{\rho} + \frac{u_ju_j}{2}\right)\right] + \nu\frac{\partial}{\partial x_j}\left[u_i\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right] - \nu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \qquad (9.7)$$

La (*9.7*) contiene dei termini dalle dimensioni di una energia, e la si indica con il nome di equazione dell'energia; non bisogna tuttavia confonderla con il primo principio della termodinamica, che afferma la conservazione dell'energia in tutte le sue forme. L'equazione della energia per il moto turbolento invece deriva dalla conservazione della quantità di moto, e non riguarda alcuna forma di energia termica.

Scriviamo ora la (*9.7*) in funzione di grandezze mediate nel tempo e di grandezze fluttuanti:

$$u_i = \bar u_i + u_i'$$

$$p = \bar p + p'$$

$$u_iu_i = \bar u_i\bar u_i + 2\bar u_iu_i' + u_i'u_i'$$

e prendiamo la media temporale di ambo i membri. Combiniamo poi (sottraendo) con la (*9.6*) moltiplicata per $\bar u_i$ e abbiamo

$$\overbrace{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\overline{u_i'u_i'}}{2}\right)}^{1} + \overbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\bar u_i\frac{\overline{u_j'u_j'}}{2}\right)}^{2} = \overbrace{-\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{u_i'\left(\frac{p'}{\rho} + \frac{u_j'u_j'}{2}\right)}}^{3}$$
$$\underbrace{-\overline{u_i'u_j'}\frac{\partial\bar u_j}{\partial x_i}}_{4} + \underbrace{\nu\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{u_j'\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)}}_{5} - \underbrace{\nu\overline{\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}}}_{6} \qquad (9.8)$$

La (*9.8*) si chiama equazione dell'energia per il moto turbolento; ogni suo termine è identificabile con un certo tipo di energia:

1, velocità di accrescimento di energia cinetica turbolenta.
2, diffusione convettiva di energia cinetica turbolenta nel moto medio.
3, diffusione convettiva di energia turbolenta nel moto turbolento.
4, produzione di turbolenza (energia presa dal moto medio).

5, lavoro compiuto dagli sforzi di taglio viscosi nel moto turbolento.
6, dissipazione di turbolenza nel moto turbolento.

Ritorneremo in seguito su questa equazione, esaminando in casi semplici i singoli termini, per avere una buona comprensione del meccanismo della turbolenza.

9.4 TEORIE FENOMENOLOGICHE

Abbiamo trovato nel precedente paragrafo le equazioni del moto turbolento, la cui utilità da un punto di vista ingegneristico è in un certo modo limitata: non c'è modo di risolverle, anche per casi molto semplici. Dobbiamo allora accostarci al problema più direttamente, tramite modelli, fisicamente magari inesatti, ma che ci consentono delle soluzioni abbastanza approssimate per i casi di maggior interesse.

Il tensore τ_{ij} (laminare τ_{ij_l} più turbolento τ_{ij_T}) dello sforzo di taglio è

$$\tau_{ij} = \mu\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}\right) - \rho\overline{u'_i u'_j} = \tau_{ij_l} + \tau_{ij_T} \tag{9.9}$$

$$\tau_{ij_l} = \mu\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}\right), \qquad \tau_{ij_T} = -\rho\overline{u'_i u'_j}, \qquad \text{per } i \neq j$$

C'è poca speranza di trovare una soluzione agli sforzi di Reynolds; il problema è dunque di collegare in qualche modo gli sforzi turbolenti e la velocità media, con un procedimento che ha avuto successo nella descrizione di moti liberi turbolenti come quelli di getti e scie. Sono tutti modelli limitati al moto bidimensionale.

(*a*) Viscosità vorticosa, o apparente.

Se scriviamo lo sforzo di taglio in funzione della viscosità laminare, più un termine addizionale che tiene conto del moto turbolento, o macroscopico, abbiamo, nel caso di moto bidimensionale,

$$\tau_{ij} = (\mu+\rho\epsilon)\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \tag{9.10}$$

nella quale ϵ si chiama viscosità vorticosa, collegata agli sforzi di Reynolds dalla

$$\epsilon = \frac{-1}{\partial \bar{u}_i/\partial x_j}\,\overline{u'_i u'_j}$$

Il vantaggio di definire la viscosità vorticosa come nella (*9.10*) è che se ϵ è una grandezza che può essere numericamente determinata (o posta in funzione della velocità media) questa forma dello sforzo di taglio può essere allora sostituita nell'equazione della quantità di moto, riducendo così il numero delle variabili dipendenti. Questo procedimento porta ad una sostanziale semplificazione del problema, ma nella maggior parte si ha una diversa ϵ nelle varie condizioni di moto: e nemmeno detta ϵ resta spazialmente costante in un moto assegnato. Considereremo la viscosità vorticosa più tardi, in alcune correnti reali.

(*b*) Lunghezza di mescolamento della quantità di moto, di Prandtl.

Prandtl ha calcolato la lunghezza sulla quale si trasferisce la quantità di moto tra strati a diversa velocità media. Questo fenomeno di trasferimento è illustrato in fig. 9-2 e descritto dalla (*9.11*):

$$\tau = \rho l^2 \left|\frac{d\bar{u}}{dy}\right| \frac{d\bar{u}}{dy} \tag{9.11}$$

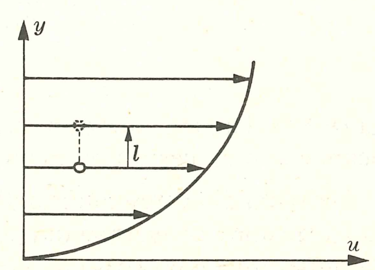


Fig. 9-2. Lunghezza di mescolamento della quantità di moto secondo Prandtl.

La lunghezza l rappresenta la distanza che dev'essere coperta da una particella di fluido, per produrre lo

sforzo di taglio turbolento apparente, relativo all'assegnato gradiente di velocità. Il modello della lunghezza di mescolamento della quantità di moto è per la turbolenza analogo alla teoria cinetica, per la quale la viscosità microscopica, o molecolare, è uguale ad una velocità (velocità molecolare media) moltiplicata per una lunghezza (cammino libero medio). Applicando alla turbolenza l'analogia con la teoria cinetica si riscontrano delle discrepanze perché nel moto turbolento c'è dissipazione, e delle particelle fluide non conservano la loro identità. La lunghezza di mescolamento si può applicare a moti bidimensionali quali il moto nei tubi, il moto su una lastra piana, getti liberi e moti di scia.

Nella maggior parte delle correnti il metodo della lunghezza di mescolamento risente delle stesse difficoltà della viscosità vorticosa: è una grandezza che varia nelle diverse condizioni di moto, e varia nello spazio anche per un moto ben identificato. Nel ricavare le equazioni della lunghezza di mescolamento si è poi assunto che essa sia piccola, mentre le misure rivelano che in certi casi è notevolmente grande.

(*c*) Altre teorie fenomenologiche.

Vi sono altri modelli di moto turbolento, simili ai due già visti. C'è la teoria del trasferimento di vorticosità di Taylor, che parte dall'ipotesi che la vorticosità di ogni particella resti costante; si ottiene in questo caso una lunghezza di mescolamento per la vorticosità, in modo simile al caso della lunghezza di mescolamento della quantità di moto, del modello di Prandtl.

9.5 CORRELAZIONI PER LA TURBOLENZA

Tralasciamo per il momento la soluzione delle equazioni, e chiediamoci invece: che cosa ci serve per avere una descrizione completa di un campo di corrente turbolenta? Le componenti della velocità istantanea in ogni punto della corrente (diciamo $u_i(x, y, z, t)$) ci sarebbero molto utili; ma come abbiamo già notato u_i è una funzione casuale del tempo, e di per sé ha una utilità pratica limitata. Inoltre

$\bar{u}_i$ descrive il campo di velocità media
$\overline{u'_i}$ non serve perché è uguale a zero
$\overline{u_i'^2}$ fornisce un'informazione sull'intensità delle fluttuazioni
$\overline{u'_i u'_j}$ fornisce ulteriori informazioni sul moto in un punto (9 grandezze, comprese le tre $\overline{u_i'^2}$). Sono grandezze che compaiono nell'equazione del moto, e si chiamano doppie correlazioni di velocità in un punto.

Anche se tutte queste grandezze fossero conosciute, il moto non sarebbe ancora completamente descritto; è come dire che anche se avessimo completamente risolta l'equazione della quantità di moto, non avremmo ancora una completa descrizione del fenomeno. Questo perché le correlazioni di velocità in un punto non danno informazioni sulle dimensioni dei filetti vorticosi, né sul modo in cui si trasmette energia da un filetto vorticoso di una dimensione ad uno di dimensione differente.

Le correlazioni di velocità tra due punti danno invece informazioni sulla dimensione dei filetti vorticosi: vogliamo qui stabilire la dipendenza della velocità in un punto A, $(u'_i)_A$, su quella di un altro punto $(u'_j)_B$, ovvero

$$\overline{(u'_i)_A (u'_j)_B}$$

Se non c'è correlazione, cioè non sussiste dipendenza di una velocità dall'altra, questa quantità è uguale a zero.

9.6 TURBOLENZA ISOTROPA

La turbolenza è isotropa quando le sue diverse grandezze caratteristiche restano inalterate se viene ruotato il sistema di riferimento: delle grandezze assegnate restano le stesse (in un punto) senza riguardo per la direzione assunta nella loro misura. La condizione di isotropia richiede che il moto sia omogeneo, resti cioè lo stesso in ogni punto.

Questa turbolenza isotropa è una condizione ideale, solo approssimativamente confrontabile con le correnti reali: un esempio abbastanza azzeccato è quello di una corrente dotata di velocità uniforme, a valle di una paratoia. Ogni corrente che presenti una variazione nella velocità media è non isotropa; lo stesso si può dire della maggior parte dei moti reali; noi studiamo le correnti isotrope solo perché è fino a un certo punto possibile vederle dal punto di vista matematico, e ci aiutano nello studio dei più complicati moti non isotropi. Buona parte della ricerca moderna si è sviluppata nell'area della turbolenza isotropa: si vedano in proposito le opere 2 e 3 nella bibliografia di pag. 192.

9.7 TURBOLENZA DI PARETE

E' il caso di un moto turbolento, influenzato da un confine solido che esercita un'azione di ritardo in modo che vi sia una variazione di velocità media tra superficie e corrente libera. In conseguenza della variazione di velocità media, il moto dev'essere anisotropo.

La turbolenza di parete si divide in due tipi: (1) esterna (strato limite) e (2) interna (moto in tubazioni e condotte). Considereremo in questo capitolo un solo esempio per ogni tipo: prima il moto su una lastra piana con gradiente di pressione zero, poi il moto a regime nelle tubazioni. Anche se la maggior parte delle correnti sono più complicate di queste, esse contengono le stesse caratteristiche fondamentali, e aiutano a capire fisicamente i più complicati moti nello strato limite e nei canali.

(*a*) **Moto di strato limite lungo una lastra piana.**

(i) *Regioni di strato limite turbolento.*

Abbiamo visto nel capitolo 5 dei metodi per descrivere la distribuzione di velocità media. I risultati della legge della parete vanno particolarmente bene nel problema della lastra piana; per esempio questi risultati, che si vedono nella fig. 5-8 di pag. 83, indicano che nello strato limite si possono distinguere tre regioni distinte:

1. Strato di parete, o sottostrato viscoso.
 E' una regione molto piccola ($0 < yu_\tau/\nu < 5$) e vicina alla parete, là dove gli sforzi viscosi sono molto maggiori di quelli turbolenti. Qui la distribuzione di velocità è una funzione lineare della distanza dalla parete: $u/u_\tau = yu_\tau/\nu$.
2. Regione turbolenta di parete, o di transizione.
 Si tratta di una regione intermedia ($5 < yu_\tau/\nu < 30$) nella quale gli sforzi viscosi e turbolenti sono all'incirca dello stesso ordine di grandezza.
3. Regione turbolenta libera.
 E' di gran lunga la maggiore delle tre ($yu_\tau/\nu > 30$). Gli sforzi turbolenti sono molto maggiori di quelli viscosi; la distribuzione della velocità media è data dalla forma logaritmica della legge della parete (equazione (*5-16*)) eccettuata la parte più esterna dello strato limite.

(ii) *Misura delle grandezze turbolente nello strato limite.*

Le velocità turbolente si misurano con gli anemometri a filo caldo; come si vede in fig. 9-3, esse passano rapidamente da zero alla parete a un valor massimo in un punto relativamente vicino alla superficie della lastra. Vediamo inoltre in fig. 9-3 che il grado di anisotropia aumenta andando dall'orlo dello strato limite verso la parete; la componente v' normale alla parete stessa presenta il valore più piccolo, perché in questa direzione la parete ha un'influenza più restrittiva.

In fig. 9-4 vediamo la distribuzione dello sforzo di Reynolds nello strato limite; notiamo che vicino alla parete c'è una zona in cui detto sforzo si mantiene essenzialmente costante. Gli sforzi viscosi sono importanti solo per il 2% dello strato limite.

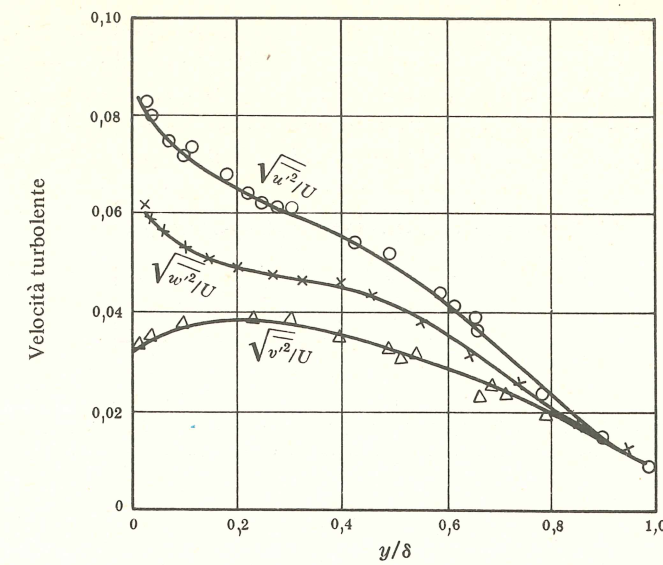
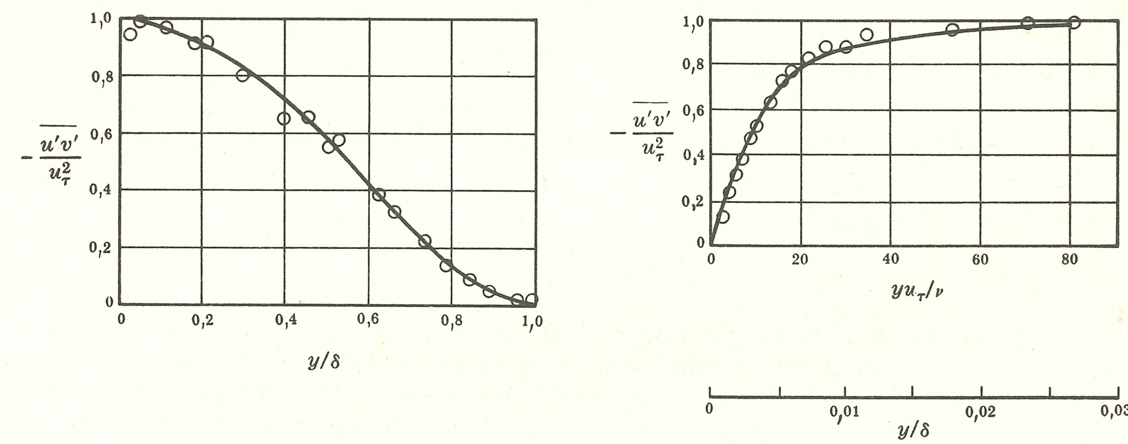


Fig. 9-3. Velocità turbolente nel moto lungo una parete con gradiente di pressione zero (v. rif. 4 in bibliografia, pag. 192).



(*a*) Distribuzione dello sforzo di taglio turbolento attraverso lo strato limite.

(*b*) Distribuzione dello sforzo di taglio turbolento in prossimità della parete.

Fig. 9-4. Sforzo turbolento nel moto su una lastra piana con gradiente di pressione zero (v. rif. 4 in bibliografia, pag. 192).

Vediamo l'equazione dell'energia per il moto su una lastra piana (esclusa la zona vicina alla parete, nella quale gli sforzi viscosi sono importanti):

$$\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\overline{q^2}}{2}\right) + \bar{v}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\overline{q^2}}{2}\right) + \overline{u'v'}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\left[\overline{v'\left(\frac{p'}{\rho}+\frac{q^2}{2}\right)}\right] - \nu\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\overline{q^2}}{2}\right) - \overline{\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}}\right] = 0 \qquad (9.12)$$

in cui q^2 è l'energia cinetica turbolenta $u_i' u_i'$. Vediamo in fig. 9-5 i risultati sperimentali che ci danno i singoli termini della (*9.12*); quelli di produzione e dissipazione prevalgono nella maggior parte dello strato limite, e sono più grandi nella regione prossima alla parete.

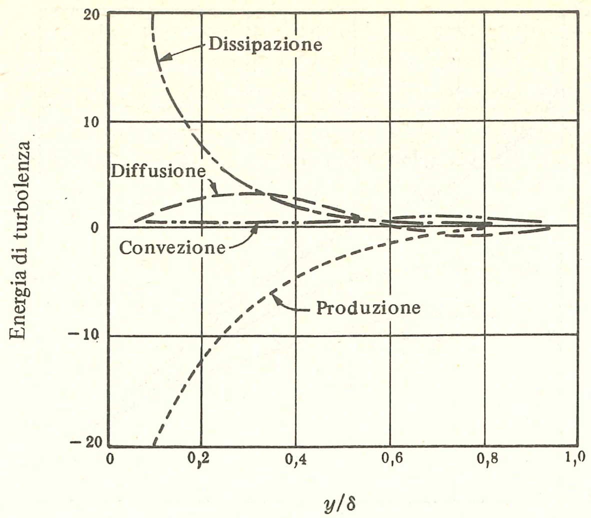


Fig. 9-5. Distribuzione di energia di turbolenza nello strato limite (v. rif. 3, pag. 192)

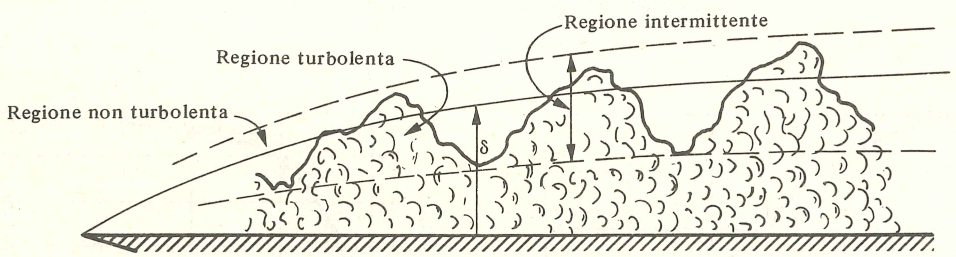


Fig. 9-6. Immagine istantanea dello strato limite turbolento, nella quale si vede la divisione netta tra regioni turbolente e non turbolente, nonché l'intermittenza.

I precedenti risultati sperimentali vengono dati in funzione di grandezze mediate nel tempo. Basandosi comunque su misure istantanee all'anemometro a filo caldo, si accetta per lo strato limite il modello di fig. 9-6; esiste un confine netto e irregolare tra regioni di corrente turbolenta e non turbolenta. Vediamo in figura una immagine istantanea, nella quale la linea di confine si sposta irregolarmente nel tempo, nei limiti $0{,}4 < y/\delta < 1{,}2$. Vi sono così tre regioni distinte: una del tutto turbolenta vicina alla superficie, $y/\delta < 0{,}4$; una turbolenta con intermittenza o non turbolenta, $0{,}4 < y/\delta < 1{,}2$; ed una non turbolenta, $y/\delta > 1{,}2$.

(*b*) **Moto turbolento a regime in una tubazione.**

Abbiamo discusso nel capitolo 5 il significato e la definizione di lunghezza richiesta, e di altre grandezze notevoli che influenzano il raggiungimento del moto a regime. Le equazioni in questo moto sono notevolmente semplificate, dato che tutti i termini di forma $\partial/\partial x$, esclusa la pressione, sono uguali a zero. La lunghezza di ingresso necessaria per raggiungere un moto a regime, in termini di velocità media, vale da 20 a 100 diametri a seconda delle condizioni all'ingresso, del numero di Reynolds, della rugosità di parete e della turbolenza iniziale. In termini di grandezze di turbolenza, la lunghezza d'ingresso che soddisfa la definizione di moto completamente a regime è notevolmente maggiore.

Il moto a regime nelle tubazioni è simile per certi aspetti al moto su lastra piana; per esempio sono entrambi dei moti bidimensionali e presentano entrambi le tre regioni fondamentali (viscosa, turbolenta di parete e turbolenta libera) nello stesso campo di distanze y/δ dalla parete.

Le differenze fondamentali consistono nel fatto che nel moto in tubazioni (1) non c'è velocità trasversale (radiale) media $\bar v$, (2) la velocità media $\bar u$ in direzione del moto principale non dipende dalla coordinata in quella direzione, (3) non esiste corrente libera, e quindi non si ha intermittenza, e (4) lo sforzo di taglio è direttamente proporzionale alla distanza dalla parete. Il moto a regime in tubazioni è uno dei più semplici tra i moti turbolenti, e per questo se ne son fatte numerose indagini sperimentali.

In questo caso le equazioni della quantità di moto sono, in coordinate cilindriche,

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar p}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\overline{u'v'}) - \nu\left(\frac{d^2\bar u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\bar u}{dr}\right) = 0 \qquad (9.13)$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar p}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\overline{v'^2}) - \frac{\overline{w'^2}}{r} = 0 \qquad (9.14)$$

con u, v, w pari rispettivamente alle velocità in direzione assiale x, in direzione radiale v, in direzione azimutale θ; r è la coordinata radiale misurata a partire dall'asse.

L'equazione dell'energia è

$$\overline{u'v'}\frac{d\bar u}{dr} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[\overline{rv'\left(\frac{p'}{\rho} + \frac{q^2}{2}\right)}\right] - \frac{\nu}{r}\frac{d}{dr}\left[r\frac{d}{dr}\left(\frac{\overline{q^2}}{2}\right)\right] + \nu\,\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}} = 0 \qquad (9.15)$$

in cui q^2, energia cinetica turbolenta, vale $(u'u' + v'v' + w'w')$.

Vediamo in fig. 9-7 le velocità di turbolenza, in fig. 9-8 la distribuzione dello sforzo di Reynolds per il moto a regime in una tubazione di raggio R. In fig. 9-9 abbiamo poi la distribuzione dell'energia di turbolenza; y è la distanza dalla parete della tubazione, U la velocità media sull'asse di simmetria.

Con questi risultati possiamo costruire un modello del moto turbolento nelle tubazioni. Il grado di similitudine tra le due correnti diminuisce comunque al diminuire della distanza dalla parete, a causa specialmente del carattere intermittente dello strato limite.

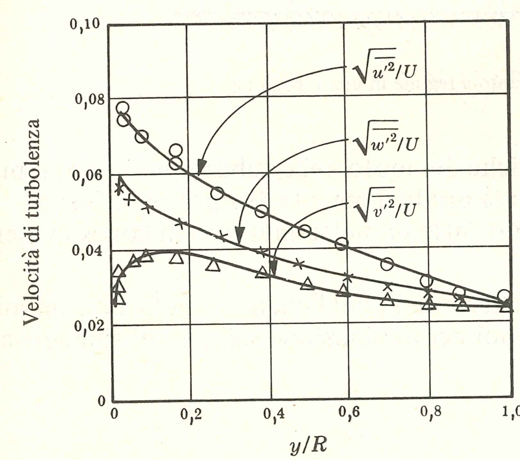


Fig. 9-7. Velocità di turbolenza per il moto a regime in una tubazione (v. rif. 5, pag. 192). R è il raggio della tubazione, y la distanza dalla parete. U è la velocità media sull'asse di simmetria.

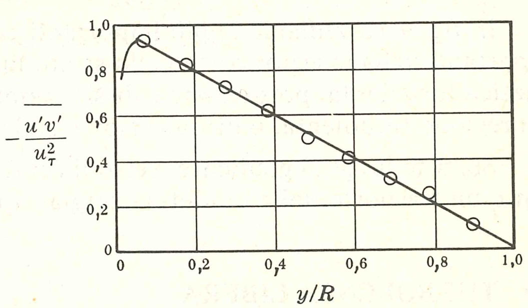


Fig. 9-8. Distribuzione dello sforzo di taglio turbolento nel moto a regime in una tubazione (rif. 5, pag. 192).

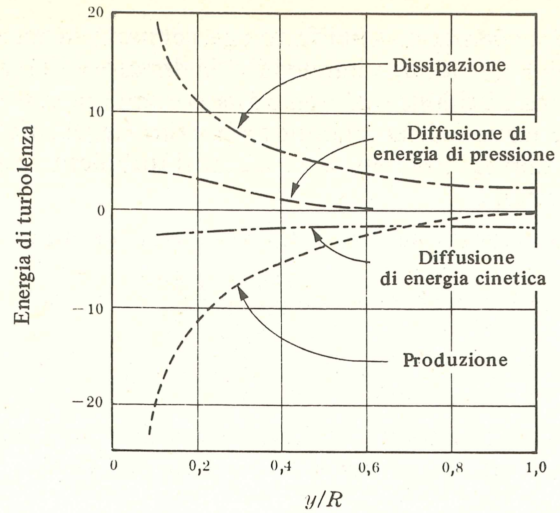


Fig. 9-9. Distribuzione dell'energia di turbolenza nel moto a regime in una tubazione (rif. 5, pag. 192).

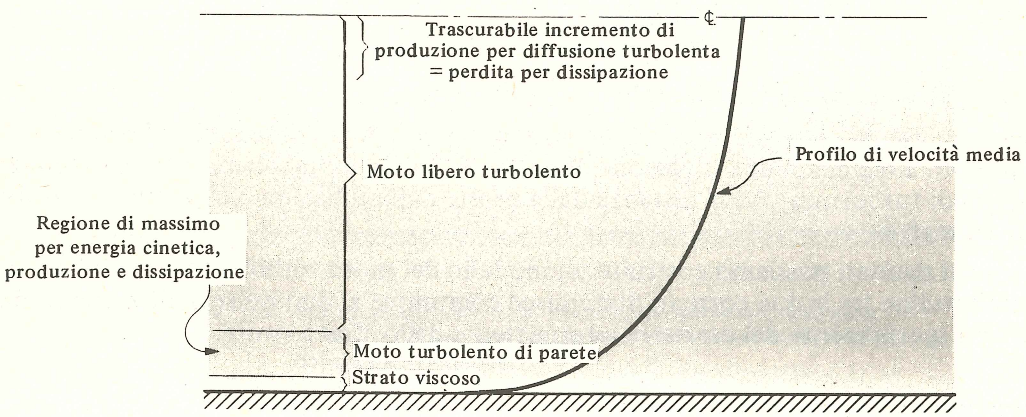


Fig. 9-10. Descrizione del moto turbolento a regime in una tubazione.

In fig. 9-10 vediamo le più importanti caratteristiche del moto nelle tubazioni; i termini più importanti nella maggior parte dello strato limite sono la produzione e la dissipazione. Energia cinetica turbolenta, produzione e dissipazione mostrano tutte un netto massimo in corrispondenza alla regione turbolenta, o di transizione, sulla parete.

Sussiste lungo il gradiente, verso il centro della tubazione in cui l'energia cinetica è a un minimo, un trasporto della suddetta energia, equilibrata poi per dissipazione sull'asse di simmetria.

9.8 TURBOLENZA LIBERA

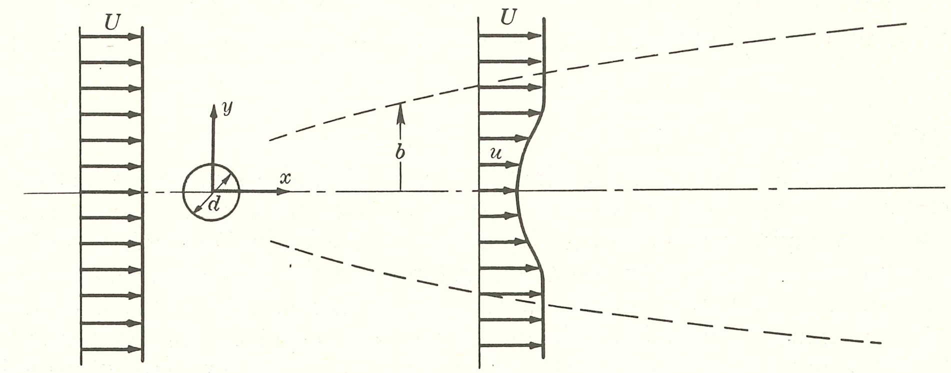
Turbolenza libera si verifica nel moto turbolento di un fluido, non direttamente influenzato da un limite materiale. Citiamo come esempi le onde che si formano dietro gli oggetti immersi in un fluido in moto, e i getti che da un ugello passano in un fluido a riposo, o che si muove lentamente.

I problemi che interessano l'ingegneria consistono nel determinare la velocità di diffusione sulla distanza in direzione del moto; la velocità media; il trasporto di quantità di moto e di energia durante il miscelamento con il fluido circostante.

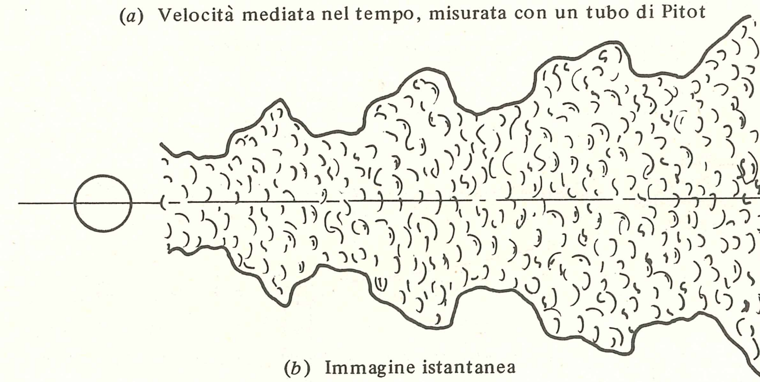
Una caratteristica dei moti liberi turbolenti è che gli effetti della viscosità non hanno alcuna influenza sul moto medio, regolato interamente dai filetti vorticosi. In questo senso, getti e moti di scia sono simili alla zona esterna dello strato limite turbolento. Il solo effetto della viscosità nei moti liberi turbolenti si riscontra nello stadio finale della dissipazione di energia turbolenta nei filetti vorticosi di scala minima.

(*a*) **Moti di scia.**

Consideriamo il moto turbolento nella scia di un cilindro circolare di diametro d come in fig. 9-11. Il problema è: essendo assegnati diametro del cilindro, fluido e velocità del fluido, trovare $u = u(x, y)$, $b = b(x)$ semilarghezza della scia, e le grandezze caratteristiche della turbolenza. Non ci è possibile determinare una soluzione completamente analitica, ma con l'aiuto di alcuni risultati sperimentali possiamo stabilire delle utili generalizzazioni.



(*a*) Velocità mediata nel tempo, misurata con un tubo di Pitot



(*b*) Immagine istantanea

Fig. 9-11. Scia turbolenta del cilindro circolare.

Le equazioni della quantità di moto lontano dal cilindro divengono:

$$U\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial y}(\overline{u'v'}) \qquad (9.16)$$

$$0 = \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \rho\frac{\partial}{\partial y}(\overline{v'^2}) \qquad (9.17)$$

nelle quali si assume $\tau_T \gg \tau_l$, $\bar{u} \gg \bar{v}$, $\partial/\partial x \ll \partial/\partial y$, $\nabla\bar{p} = 0$. τ_T è lo sforzo di taglio turbolento definito dalla (*9.9*), τ_l lo sforzo di taglio laminare.

Per quanto le (*9.16*) e (*9.17*) possano sembrar semplici rispetto alle equazioni originali, esse non bastano per darci una soluzione. Quindi il criterio generale da seguire nella ricerca di soluzioni ai problemi dei getti e del moto nelle scie è di assumere profili di velocità simili, sostituendo nel contempo lo sforzo di Reynolds con uno dei modelli fenomenologici, come la viscosità dei filetti vorticosi o la lunghezza di mescolamento di Prandtl.

Per profilo di velocità simile intendiamo una distribuzione di velocità di forma

$$\bar{u}/U = f(y/b) \qquad (9.18)$$

Il criterio della similitudine, insieme alla lunghezza di mescolamento della quantità di moto di Prandtl, è stato usato da Schlichting (rif. 7, pag. 192); assumendo che la lunghezza di mescolamento sia proporzionale alla larghezza dell'onda, egli ha risolto l'equazione differenziale e con l'equazione integrale della quantità di moto ha ottenuto

$$b = \sqrt{10}\,\beta(xC_D\,d)^{1/2} \qquad (9.19)$$

$$\frac{U-\bar{u}}{U} = \frac{\sqrt{10}}{18\beta}[x/C_D\,d]^{-1/2}[1-(y/b)^{3/2}]^2 \qquad (9.20)$$

in cui $\beta = 0{,}18$ è una costante ricavata sperimentalmente. C_D è il coefficiente di resistenza.

La *(9.19)* è in buon accordo con i risultati sperimentali per $x/d > 10$; la *(9.20)* lo è per $x/d > 50$.

(*b*) **Moto nei getti.**

Consideriamo ora il getto circolare turbolento di fig. 9-12; il moto può essere distinto in tre zone, ognuna con un carattere suo proprio. La prima è costituita da un nucleo potenziale a velocità media uniforme U_P limitato da uno strato tagliante, che a sua volta è racchiuso da fluido a velocità media uniforme U_S. Questa zona comincia alla bocca dell'ugello ed ha una lunghezza pari a 4 o 5 volte il diametro del suddetto. La regione II è caratterizzata sia dall'assenza di un nucleo potenziale che dall'assenza di similitudine nella distribuzione della velocità media. Segue la regione III, che comincia ad una distanza pari a circa 8 diametri dell'ugello ed è caratterizzata da distribuzioni di velocità simili.

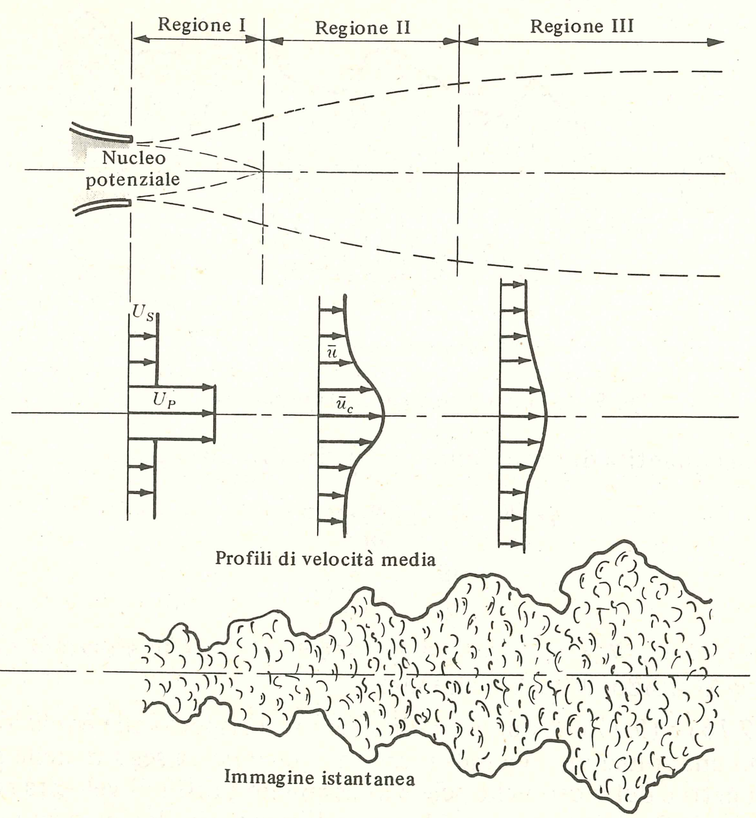


Fig. 9-12. Regioni e profili di velocità in un getto turbolento.

Esiste un gran numero di ricerche sui getti turbolenti per la loro importanza nei problemi d'ingegneria, la semplicità e l'influenza su altri moti turbolenti; sull'argomento sono stati pubblicati due libri (riff. 1 e 6, pag. 192).

Hinze (rif. 3, pag. 192) si è servito del metodo della similitudine e di una viscosità di filetto vorticoso, ricavando una soluzione per la distribuzione della velocità media. Usando l'equazione della quantità di moto nella forma differenziale e l'equazione integrale della quantità di moto, egli ha trovato che per $(U_P-\bar{u})/U_S \gg 1{,}0$, b è proporzionale ad $(x+a)$ e

$$\frac{U_P-\bar{u}}{U_P-\bar{u}_c} = \left[1+\frac{(U_P-\bar{u}_c)r^2}{8\epsilon(x+a)}\right]^{-2}$$

Per $(U_P-\bar{u})/U_S \ll 1{,}0$, b è proporzionale a $(x+a)^{1/2}$. Qui ϵ si assume costante; a è una costante sperimentale; U_P e U_S sono quelli di fig. 9-12, mentre $\bar{u}_c$ è la velocità sull'asse di simmetria.

Nella tabella 9-1 sono riassunti i risultati che riguardano la velocità di accrescimento della scia e del getto, nonché le velocità sull'asse di simmetria.

Tabella 9-1. LARGHEZZA DELLA SCIA. VELOCITA' SULL'ASSE DI SIMMETRIA

	Larghezza proporzionale a	Salto di velocità $(\bar{u}_c - U_S)$, sull'asse di simmetria, proporzionale a
Getto piano bidimensionale	x	$x^{-1/2}$
Getto circolare	x	x^{-1}
Scia piana bidimensionale	$x^{1/2}$	$x^{-1/2}$
Scia circolare	$x^{1/3}$	$x^{-1/3}$

Questi risultati naturalmente non sono validi nelle zone prossime alla scia e all'ugello.

9.9 SOMMARIO

Abbiamo studiato il moto turbolento incompressibile, in funzione della "turbolenza isotropa" e della "turbolenza di taglio". La prima è caratterizzata da un moto estremamente idealizzato, che richiede che non esista alcuna variazione nella velocità media; è raro che la si possa approssimare con moti reali di una certa importanza, ma si presta ad una certa trattabilità dal punto di vista matematico. E' stata quindi sottoposta ad uno studio intensivo, tentando di ottenere una miglior comprensione dei più complicati moti non-isotropi.

La turbolenza di taglio si può dividere ancora in "turbolenza di parete", come i moti di strato limite, e "turbolenza libera", come quella delle scie e dei getti. Si tratta di trovare la velocità media, lo sforzo di taglio, le grandezze cosiddette turbolente. Abbiamo a disposizione due metodi: (1) il criterio fenomenologico che definisce dei coefficienti di scambio come la viscosità del filetto vorticoso e la lunghezza di mescolamento, per collegare lo sforzo di turbolenza al campo di velocità media; (2) il criterio statistico, per il quale si scrivono le equazioni differenziali fondamentali con termini mediati nel tempo. Dal punto di vista ingegneristico tutti e due i metodi sono validi.

Il lettore troverà altre informazioni, e potrà approfondire questi concetti, nei riff. 2, 3, 9 di pag. 192.

BIBLIOGRAFIA

1. Abramovich G. N., *The Theory of Turbulent Jets,* (USSR), MIT Press, 1963.
2. Batchelor G. K., *The Theory of Homogeneous Turbulence*, Cambridge University Press, 1960.
3. Hinze J. O., *Turbulence*, McGraw-Hill, 1959.
4. Klebanoff P. S., "Characteristics of Turbulence in a Boundary Layer with Zero Pressure Gradient", NACA TN 3178, 1954.
5. Laufer J., "The Structure of Turbulence in Fully Developed Pipe Flow", *NACA R. 1174*, 1954.
6. Pai S. I., *Fluid Dynamics of Jets*, Van Nostrand, 1954.
7. Schlichting H., *Boundary Layer Theory*, McGraw-Hill, 1962.
8. Schubauer G. B., Tchen C.M., *Turbulent Flow*, Princeton University Press, 1961.
9. Townsend A. A., *The Structure of Turbulent Shear Flow,* Cambridge University Press, 1956.
10. Finzi B., *Aerodinamica*, Tamburini, Milano 1960.
11. De Marchi G., *Idraulica*, Hoepli, Milano 1939.

PROBLEMI SUPPLEMENTARI

9.1. Ricavare le equazioni del moto a densità e viscosità costanti per il moto turbolento a regime in anelli concentrici; il moto procede in direzione assiale.

9.2. Dimostrare che l'equazione di continuità in regime incompressibile è soddisfatta dalle sole deviazioni istantanee.

9.3. Consideriamo un moto a regime bidimensionale tra due pareti parallele, una delle quali è ferma e l'altra in moto a velocità costante U. Assumiamo $\partial\bar{p}/\partial x = 0$,con x misurata in direzione del moto.

(*a*) Definire la forma generale della curva della velocità media.

(*b*) Trovare la distribuzione dello sforzo di taglio.

(*c*) Trovare la distribuzione approssimata della viscosità ϵ di filetto vorticoso e la lunghezza di mescolamento L.

(*d*) Trovare una distribuzione di pressione approssimata.

9.4. Consideriamo dell'aria in moto ($p = 1$ kg/cm^2, $T = 15\,°$C, $\rho = 1{,}23$ kg/m^3, $\mu = 0{,}1785\,(10)^{-3}$ poise, $\nu = 0{,}146$ stoke) con una velocità di corrente indisturbata di 15 m/s, su una lastra piana. In una certa sezione si ha $\delta = 7{,}0$ cm e lo sforzo di taglio in parete è $\tau_0 = 0{,}0396$ kg/m^2. Ammettiamo che la distribuzione di velocità per $20 < yu_\tau/\nu < 1000$ sia data dalla

$$\bar{u}/u_\tau \;=\; 2{,}44 \ln yu_\tau/\nu \;+\; 4{,}9$$

Ponendo poi che lo sforzo di taglio sia costante, calcoliamo (*a*) la lunghezza di mescolamento di Prandtl, (*b*) il rapporto ϵ/ν per $y = 0{,}25$ cm.

NOMENCLATURA USATA NEL CAPITOLO 9

a	=	costante
b	=	semilarghezza di scia o di getto
B_i	=	forza di massa agente per unità di volume
C_D	=	coefficiente di resistenza
d	=	diametro del cilindro
f	=	notazione funzionale
l	=	lunghezza di mescolamento della quantità di moto (Prandtl)
m	=	esponente per la distribuzione di velocità secondo la legge della potenza
n	=	esponente per la distribuzione di velocità secondo la legge della potenza
p	=	pressione
q^2	=	energia cinetica turbolenta, $u'_i u'_i$
r	=	coordinata radiale
R	=	raggio della tubazione
t	=	tempo
T_1	=	tempo assunto per una media temporale
U	=	velocità di corrente indisturbata, velocità media sull'asse di simmetria di una tubazione
U_P	=	velocità del getto
U_S	=	velocità di corrente secondaria
$\bar{u}_c$	=	velocità media sull'asse di simmetria
u_i	=	$u_1, u_2, u_3 = u, v, w$ componenti della velocità
u_τ	=	velocità di attrito, $\sqrt{\tau_0/\rho}$
x_i	=	$x_1, x_2, x_3 = x, y, z$ coordinate cartesiane
y	=	distanza dalla parete
$\overline{u'_i u'_j}$	=	correlazione di velocità ad un punto
$\overline{(u'_i)_A (u'_j)_B}$	=	correlazione di velocità a due punti
δ	=	spessore dello strato limite
ϵ	=	viscosità del filetto vorticoso
μ	=	viscosità
ν	=	viscosità cinematica, μ/ρ
ρ	=	densità
τ_{ij}	=	tensore dello sforzo di taglio
τ_{ij_T}	=	tensore dello sforzo di taglio turbolento $= -\rho\,\overline{u'_i u'_j}$
τ_{ij_l}	=	tensore dello sforzo di talio laminare $= \mu \dfrac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}$
τ	=	componente dello sforzo di taglio, riguardante un particolare problema
τ_0	=	sforzo di taglio alla parete
$(\bar{\ })$	=	indica un valor medio
$(\)'$	=	indica una componente fluttuante

CAPITOLO 10

Moto di strato limite ipersonico

10.1 INTRODUZIONE

Il moto ipersonico è diventato importante, a causa dell'aumentato interesse verso i missili e i vettori spaziali. Se un oggetto entra, o vola nell'atmosfera terrestre ad altissimi numeri di Mach, dall'alta temperatura del gas nella regione che circonda il corpo può derivare la dissociazione delle molecole. Per ipersonico si intende un moto ad alta velocità, nel quale il numero di Mach è cosí grande che si verifica la dissociazione ($M > 6$, nell'atmosfera terrestre).

Cominciamo lo studio del moto ipersonico considerando, come esempio, i diversi regimi di corrente che si creano attorno ad un veicolo spaziale che entra nell'atmosfera terrestre: vedi fig. 10-1. Davanti si forma un *arco d'urto*, che si avvolge intorno al corpo; più avanti il moto è indisturbato. E' un urto più forte sull'asse di simmetria, perché lì esso risulta normale alla corrente: subito dopo c'è la zona nella quale si verifica la dissociazione, e in mezzo abbiamo una regione nella quale gli effetti della viscosità sono secondari; vicino alla superficie del corpo abbiamo lo strato limite, nel quale gli sforzi viscosi sono prevalenti: lì il moto può essere laminare o turbolento. Allo scorrere del fluido verso la parte posteriore del corpo notiamo che esso viene richiamato verso l'asse, come in una espansione Prandtl-Meyer; segue una rotazione della corrente nella direzione opposta (raddrizzamento), come conseguenza della riunione delle vene fluide che provengono da direzioni opposte; questo raddrizzamento genera un'onda d'urto obliqua, l'*urto di scia*. La corrente che segue quest'ultimo è costituita da una scia che contiene un nucleo turbolento, circondato da una regione di corrente non turbolenta. Nella scia la velocità è ridotta (ed è minima sull'asse di simmetria) ma dietro il corpo aumenta con la distanza, fino ad essere praticamente uniforme e uguale alla velocità di corrente indisturbata. Il nucleo turbolento persiste comunque dietro il corpo per lunghe distanze, persino migliaia di diametri del corpo stesso.

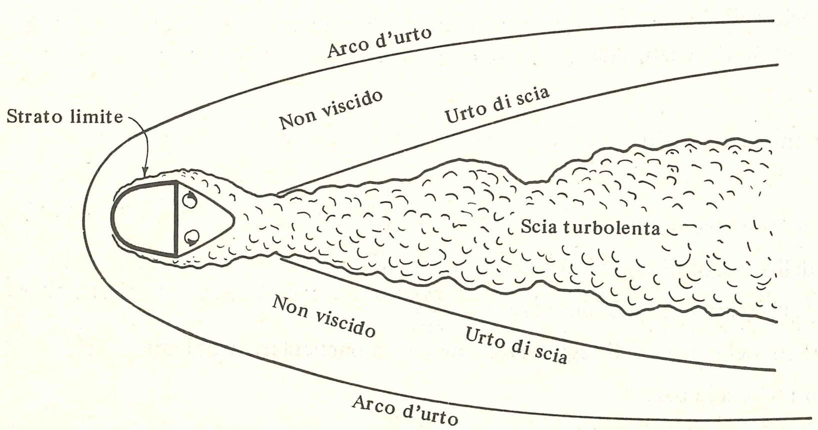


Fig. 10-1. Regimi di moto ipersonico.

In questo capitolo esamineremo lo strato limite e i moti di scia, ma non vedremo come trovare la forma dell'urto e le regioni di moto non viscido: per questo è necessario un procedimento numerico per la soluzione delle equazioni. Abbiamo già visto le idee fondamentali del moto supersonico nel capitolo 8, che può darci qualche idea dei metodi che bisogna seguire in questi calcoli.

Il problema dello strato limite turbolento ipersonico è uno dei più complicati della meccanica dei fluidi. Esso mantiene tutte le difficoltà (e nel capitolo 9 abbiamo visto che erano parecchie) del moto turbolento incompressibile, con in piú le complicazioni portate dalle grandi variazioni in densità e temperatura, dalla dissociazione e dalla ricombinazione di molecole, dalla diffusione.

Ci accosteremo al problema scrivendo le equazioni fondamentali, vedremo come usare i risultati ottenuti per correnti più semplici, e discuteremo brevemente i metodi di soluzione delle equazioni suddette.

10.2 EQUAZIONI DELLO STRATO LIMITE

Le equazioni dello strato limite sono quelle viste nel capitolo 5, ma adesso bisogna tener conto degli effetti delle reazioni chimiche e della diffusione; le semplici equazioni iniziali non sono adeguate, per fluidi che non sono omogenei nella concentrazione di particelle di vario tipo. Nel moto ipersonico abbiamo forti gradienti di temperatura e di diffusione: avranno quindi luogo dei trasporti di massa, quantità di moto, energia per diffusione.

Come già detto, abbiamo due procedimenti per sviluppare le equazioni della meccanica dei fluidi. Il primo, che è quello più usato, si basa sul principio del continuo: le equazioni della quantità di moto e dell'energia, per esempio, si ricavano assumendo che il fluido sia un continuo. Delle relazioni fenomenologiche collegano poi il taglio e la velocità di deformazione, il flusso di calore e il gradiente di temperatura, la diffusione in massa e il gradiente di concentrazione. Queste sono relazioni del primo ordine, che valgono per un moto piano bidimensionale (x y), con velocità u in direzione delle x.

$$\tau_{yx} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{legge di Stokes} \tag{10.1}$$

$$q_y = -\kappa \frac{\partial T}{\partial y} \quad \text{legge di Fourier} \tag{10.2}$$

$$V_{iy} = -D_{ij} \frac{1}{C_i} \frac{\partial C_i}{\partial y} \quad \text{legge di Fick} \tag{10.3}$$

I coefficienti sono: μ per la viscosità, κ per la conducibilità termica, D_{ij} per il coefficiente di diffusione binaria (diffusione della specie i in una miscela della specie i e j), e sono noti come coefficienti di trasporto; abbiamo inoltre

- τ_{yx} = sforzo di taglio
- q_y = portata di calore in direzione y
- V_{iy} = velocità di diffusione in direzione y per una specie i che si diffonde in una miscela di specie i e j [v. l'equazione (*10.4*)]
- C_i = frazione di massa della specie i = rapporto tra massa per unità di volume della specie i, e densità totale.

Il secondo procedimento parte dal punto di vista particellare: abbiamo a che fare con la dinamica delle particelle che collidono. E' un criterio approfondito nei testi di Chapman e Cowling (rif. 2, pag. 203), in quelli di Hirschfelder, Curtiss e Bird (rif. 3): qui non ne terremo conto se non per l'equazione di conservazione della specie che esso ci dà (rif. 1, pag. 203):

$$\rho \frac{DC_i}{Dt} = \dot{w}_i - \nabla \cdot (\rho C_i \mathbf{V}_i) \qquad (10.4)$$

in cui $\mathbf{V}_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{V}$ = velocità di diffusione della specie i

$\mathbf{v}_i$ = velocità media della specie i

$\mathbf{V}$ = velocità media di massa di tutte le specie $= \dfrac{\sum_i \rho C_i \mathbf{v}_i}{\sum_i \rho C_i} = \dfrac{\sum_i \rho_i \mathbf{v}_i}{\sum_i \rho_i}$, in cui ρ_i è la densità di massa della specie i. $\mathbf{V}$ ha componenti u e v

$\dot{w}_i$ = velocità di produzione in massa della specie i, per unità di volume, causata da reazioni chimiche

ρ = densità di massa totale $= \sum_i \rho_i$.

Assumendo un moto di strato limite permanente, piano e bidimensionale, trascurando i termini di diffusione sulle x e applicando la legge di Fick, l'*equazione di conservazione della specie*, diventa

$$\rho \left[u \frac{\partial C_i}{\partial x} + v \frac{\partial C_i}{\partial y} \right] = \dot{w}_i + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho D_{12} \frac{\partial C_i}{\partial y} \right) \qquad (10.5)$$

nella quale u e v sono le componenti, secondo le x e le y, della velocità media di massa $\mathbf{V}$; abbiamo così sostituito D_{ij} con D_{12}, coefficiente di diffusione binaria. Si può dimostrare che $D_{12} = D_{21}$ e per la maggior parte dei sistemi gassosi interessanti il coefficiente binario è adeguato. Di solito abbiamo specie pesanti e specie leggere: nell'aria per esempio abbiamo le particelle pesanti O_2 ed N_2 e quelle leggere O ed N. D_{12} descrive adeguatamente la diffusione di O, o N, in O_2 e N_2. L'equazione di continuità totale è

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \qquad (10.6)$$

e l'equazione della quantità di moto per il fluido nel suo insieme:

$$\rho \left[u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \qquad (10.7)$$

E complessivamente l'equazione dell'energia totale per il fluido, sapendo che il contributo della energia cinetica $v^2/2$ è trascurabile rispetto a $u^2/2$, risulta pari a

$$\rho \left[u \frac{\partial}{\partial x}(h + u^2/2) + v \frac{\partial}{\partial y}(h + u^2/2) \right]$$
$$= \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\mu}{P_r} \frac{\partial}{\partial y}(h + u^2/2) + \mu \left(1 - \frac{1}{P_r} \right) \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial y} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{1}{L} - 1 \right) \rho D_{12} \sum_i h_i \frac{\partial C_i}{\partial y} \right] \qquad (10.8)$$

in cui $h = \sum_i C_i h_i$

$h_i = \int_0^T c_{pi}\, dT + h_i^0$

h_i^0 = calore di formazione della specie i

$P_r = \dfrac{\mu c_{pf}}{\kappa}$, numero di Prandtl

$L = \dfrac{\rho D_{12} c_{pf}}{\kappa}$, numero di Lewis

$c_{pf} = \sum_i C_i c_{pi}$, calore specifico a pressione costante, congelato nella particolare configurazione.

Il lettore troverà nel riferimento 4 di pag. 203 una derivazione e la discussione dell'equazione dell'energia. Essendo quest'ultima importante nel moto ipersonico, ne tracciamo qui la derivazione.

Consideriamo un volume di controllo infinitesimo, come in fig. 10-2, in un certo punto della corrente. Scriviamo per esso l'equazione dell'energia, considerando prima i flussi:

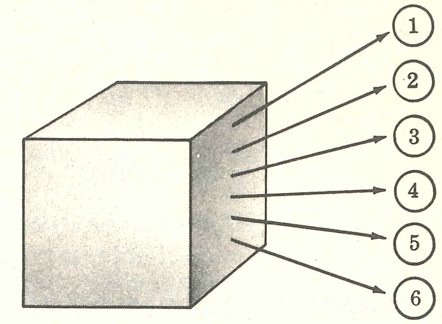


Fig. 10-2. Volume di controllo infinitesimo per l'equazione dell'energia.

1. Flusso di energia interna e di energia cinetica, uscenti dal volume di controllo:

$$\nabla \cdot \left[(\rho \mathbf{V}) \left(\sum_i C_i e_i + u^2/2 \right) \right]$$

essendo $e_i = \int_0^T c_{vi}\, dT$, l'energia interna specifica della specie i-ma, nell'ipotesi che si tratti di un gas perfetto.

2. Trasferimento di energia a livello molecolare, dovuto al gradiente di temperatura:

$$-\nabla \cdot (\kappa \nabla T)$$

3. Quantità di lavoro per unità di volume, effettuata dal fluido tramite le forze di pressione:

$$\nabla \cdot (p\mathbf{V})$$

4. Quantità di lavoro per unità di volume, effettuata dal fluido tramite le forze viscose:

$$\nabla \cdot [\tau \cdot \mathbf{V}] = \frac{\partial}{\partial x_i}(\tau_{ij} u_j)$$

5. Energia estratta dalla diffusione di massa della specie i:

$$\nabla \cdot \left(\sum_i \rho \mathbf{V}_i C_i h_i \right)$$

in cui $\mathbf{V}_i = -\dfrac{D_{12}}{C_i} \nabla C_i$

6. Energia aggiunta, dovuta alla formazione di una specie:

$$-\sum_i \dot{w}_i h_i^0$$

in cui $h_i^0 = 0$, per le molecole; h_i^0 = un valore positivo per gli atomi.

Se sommiamo i sei effetti precedenti abbiamo questa equazione dell'energia:

$$\rho \mathbf{V} \cdot \nabla \left(\sum_i C_i e_i + u^2/2 \right) + \left(\sum_i C_i e_i + u^2/2 \right) \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) - \nabla \cdot (\kappa \nabla T)$$
$$+ \nabla \cdot (p\mathbf{V}) + \nabla \cdot (\tau \cdot \mathbf{V}) + \nabla \cdot \left(\sum_i \rho \mathbf{V}_i C_i h_i \right) + \sum_i \dot{w}_i h_i^0 = 0 \qquad (10.9)$$

Oltre alla (*10.9*) usiamo nella derivazione: l'equazione di stato

$$p_i = \rho_i R_i T \qquad (10.10)$$

in cui tutte le specie si assumono alla stessa temperatura e $p = \sum_i p_i = \rho \bar{R} T$, $\bar{R} = \sum_i C_i R_i$,

$$h_i = e_i + R_i T \qquad (10.11)$$

e l'equazione di continuità

$$\nabla \cdot \rho \mathbf{V} = 0 \qquad (10.12)$$

Usando le (*10.4*), (*10.9*), (*10.10*), (*10.11*) e la (*10.12*), e assumendo $h_i = f(T)$, ricaviamo l'equazione dell'energia in forma dell'equazione (*10.8*).

L'equazione dell'energia totale per un moto di strato limite diventa, in funzione della temperatura,

$$c_{pf}\left[\rho u\frac{\partial T}{\partial x} + \rho v\frac{\partial T}{\partial y}\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left(\kappa\frac{\partial T}{\partial y}\right) + u\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - \sum_i \dot{w}_i h_i^0 + \sum_i c_{pi}\left(D_{ij}\rho\frac{\partial C_i}{\partial y}\right) \qquad (10.13)$$

Le equazioni da (*10.4*) alla (*10.8*) compresa sono allora le equazioni fondamentali del moto di strato limite ipersonico (laminare).

10.3 STRATO LIMITE LAMINARE IPERSONICO

Anche se è probabile che in qualche punto del corpo si verifichi la transizione, per la quale il moto passa da laminare a turbolento, qui studieremo solo il moto laminare. Lasciamo il turbolento per il prossimo paragrafo.

Consideriamo un gas ideale che si sta dissociando. La molecola A_2 si dissocia in atomi A

$$A_2 \rightleftarrows 2A$$

in cui $\rho_A/\rho = \alpha$, frazione in massa degli atomi

$\rho_M/\rho = (1-\alpha)$, frazione in massa delle molecole.

Gli indici A ed M si riferiscono rispettivamente all'atomo e alla molecola. Una forma alternativa dell'equazione dell'energia (*10.8*) è

$$\rho u\frac{\partial h}{\partial x} + \rho v\frac{\partial h}{\partial y} = u\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\kappa\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho D_{12}\sum_i h_i\frac{\partial C_i}{\partial y}\right) + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \qquad (10.14)$$

Avremo allora per un gas dissociante ideale

$$\rho u\frac{\partial h}{\partial x} + \rho v\frac{\partial h}{\partial y} = u\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\kappa\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left[\rho D_{12}h_A\frac{\partial \alpha}{\partial y} - \rho D_{12}h_M\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right] + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \qquad (10.15)$$

E l'equazione di conservazione della specie diventa

$$\rho u\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \rho v\frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho D_{12}\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right) + \dot{w}_A \qquad (10.16)$$

Le equazioni di conservazione della specie, di continuità, della quantità di moto e dell'energia, cioè le (*10.16*), (*10.6*), (*10.7*) e (*10.15*), insieme alle relazioni caratteristiche, definiscono il problema, sempre che siano assegnate le particolari condizioni al contorno. E' inoltre necessario determinare gli adatti valori dei coefficienti di trasporto.

La soluzione di queste equazioni presenta delle difficoltà enormi; consideriamo allora un problema collegato, relativamente meno difficile. Studiamo il moto su una lastra piana di un gas non reagente, con gradiente di pressione zero e proprietà costanti (vedi lo Schlichting, rif. 6, pag. 203). Le equazioni diventano

$$\rho u\frac{\partial h}{\partial x} + \rho v\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\kappa\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

$$\rho u\frac{\partial u}{\partial x} + \rho v\frac{\partial u}{\partial y} = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Le condizioni al contorno sono

$$y = 0;\quad u = v = 0,\ T = T_w$$

$$y = \infty;\quad u = U_\infty,\ T = T_\infty$$

Per la trasmissione di calore in parete abbiamo

$$q = -\kappa\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{C_f}{2}(P_r)^{-2/3}\rho_\infty U_\infty\left[h_\infty + (P_r)^{1/2}\frac{U_\infty^2}{2} - h_w\right]$$

in cui $C_f = 1{,}328\sqrt{\nu/U_\infty x}$, $P_r = \mu c_p/\kappa$.

Le ulteriori complicazioni date dalle proprietà che variano, dalla dissociazione e dalla diffusione rendono il problema notevolmente più difficoltoso. Anche se non sappiamo ricavare una soluzione, possiamo fissare alcune caratteristiche del moto ipersonico.

Il flusso di calore senza dissociazione è $q = -\kappa\,\partial T/\partial y$. Il flusso di calore totale, con dissociazione, è [vedi equazione (*10.15*)]

$$q = -\kappa\frac{\partial T}{\partial y} - \rho D_{12}(h_A - h_M)\frac{\partial \alpha}{\partial y} \qquad (10.17)$$

Ma

$$h_A - h_M = h_A^0 + \int_0^T (c_{pA} - c_{pM})\,dT$$

che vale circa h_A^0, e

$$q = -\kappa\frac{\partial T}{\partial y} - \rho D_{12}h_A^0\frac{\partial \alpha}{\partial y}$$

Consideriamo ora una parete adiabatica ($q = 0$), e

$$\frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{\rho D_{12}h_A^0}{\kappa}\frac{\partial \alpha}{\partial y}$$

Può esserci dunque alla parete un gradiente di temperatura non nullo, anche se il flusso di calore è zero: vedi fig. 10-3.

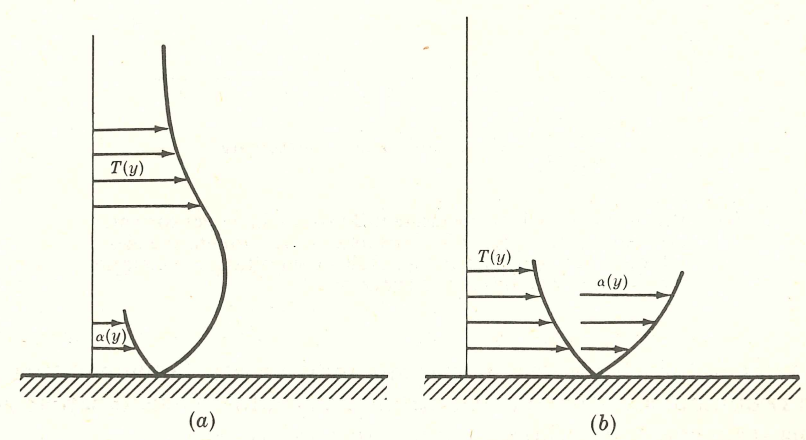


Fig. 10-3. Distribuzioni di velocità e di concentrazione su una parete adiabatica. (*a*) Parete fredda, (*b*) parete calda.

Il Dorrance (rif. 1, pag. 203) dimostra che per un gas dissociante, in moto su una lastra piana, la trasmissione di calore alla parete vale

$$q = -\frac{C_f}{2}\rho_\infty U_\infty P_r^{-2/3}\left(h_\infty - h_w + P_r^{1/2}\frac{U_\infty^2}{2}\right)\left[1 + \frac{(L-1)(\alpha_\infty - \alpha_w)h_A^0}{h_\infty - h_w + P_r^{1/2}U_\infty^2/2}\right]^{2/3} \qquad (10.18)$$

Notiamo, nell'equazione (*10.18*), che se $L = 1{,}0$ oppure $\alpha_\infty = \alpha_w$, ricadiamo nella stessa equazione del caso di dissociazione nulla. Gli indici ∞ e w indicano rispettivamente corrente indisturbata e condizioni in parete. L è il numero di Lewis.

Abbiamo sinora limitato la nostra discussione al caso del moto su lastra piana, e abbiamo approfondito l'esame della trasmissione del calore nelle correnti su corpi dal profilo smussato, specie nella zona del punto di ristagno, nella quale si ha un grande flusso di calore. Si tratta di problemi studiati a fondo da Dorrance, Lees, Fay, Riddell ed altri (riff. 1, 5, 4, pag. 203). Qui non andremo oltre.

Il metodo generale è di impiantare delle trasformazioni di coordinate, in modo di passare da un problema che implica delle equazioni differenziali alle derivate parziali ad uno che riguarda delle equazioni differenziali ordinarie. Queste equazioni poi si risolvono con metodi numerici: (1) per un moto "congelato" (cioè per una velocità di ricombinazione abbastanza bassa, con la concentrazione degli atomi completamente determinata dal moto diffusivo); (2) per un moto d'equilibrio (cioè per una velocità di ricombinazione abbastanza grande, con la temperatura che determina dappertutto la concentrazione). Vediamo in fig. 10-4 i risultati ottenuti per alcuni valori dei numeri di Lewis e Prandtl e della temperatura.

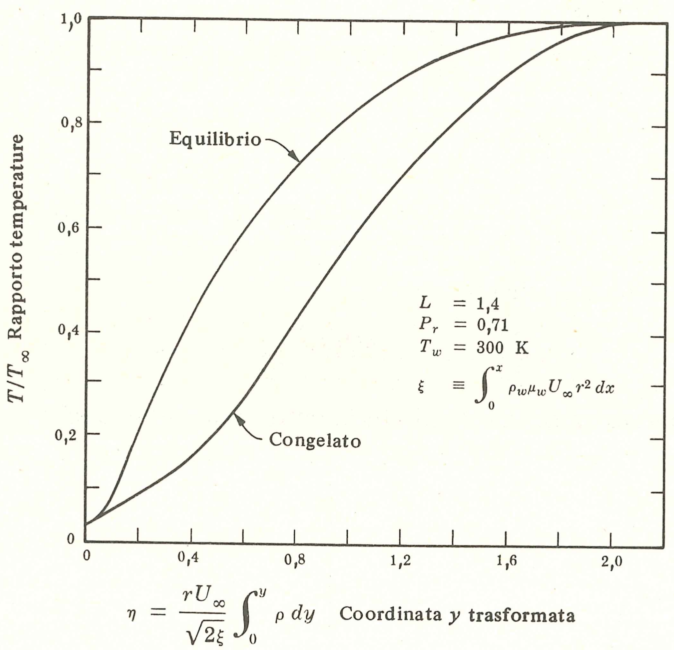


Fig. 10-4. Distribuzione della temperatura nello strato limite per corrente ipersonica (rif. 4, pag. 203). Si assume che la corrente si svolga attorno ad un oggetto cilindrico dalla punta ottusa; r è il raggio del cilindro, y la distanza dalla parete.

Per le stesse temperature di parete e di corrente indisturbata, la temperatura intermedia del moto d'equilibrio risulta più alta di quella del moto "congelato". Questo perché gli atomi si ricombinano non appena si spostano in un'area a temperatura inferiore.

10.4 STRATO LIMITE TURBOLENTO IPERSONICO

Quando un oggetto entra nell'atmosfera terrestre, il campo di corrente che lo circonda passa attraverso diverse fasi. Lo stadio iniziale del rientro si svolge in un mezzo a bassa densità, nel quale le assunzioni del continuo non sono valide. Segue un mezzo più denso, nel quale il moto si comporta come continuo ed è laminare. Al proseguire della penetrazione nell'atmosfera compaiono delle fluttuazioni erratiche di velocità, in forma di turbolenza della scia a valle. Un ulteriore aumento della densità fa sì che il confine tra corrente laminare e corrente turbolenta risalga verso monte, fino al punto in cui alla fine la maggior parte dello strato limite è turbolento. Dopo questo

la corrente si presenta come in fig. 10-1.

Non considereremo il problema della transizione; assumeremo piuttosto che esista uno strato limite turbolento, procedendo poi a descrivere la corrente. Sarà un metodo del tutto simile a quello visto nel capitolo 9 per la turbolenza.

Prendiamo le equazioni di continuità, della specie, della quantità di moto e dell'energia viste nei paragrafi precedenti. Se moltiplichiamo per C_i l'equazione di continuità (*10.6*) e sommiamo l'equazione della specie (*10.5*), otteniamo

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u C_i) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v C_i) = -\frac{\partial}{\partial y}(\rho C_i V_{iy}) + \dot{w}_i \qquad (10.19)$$

Combinando l'equazione di continuità con quella della quantità di moto (*10.7*) abbiamo

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v u) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right) \qquad (10.20)$$

Moltiplicando per I, entalpia di ristagno $(h + u^2/2)$, l'equazione di continuità e sommando l'equazione dell'energia abbiamo

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u I) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v I) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\mu}{P_r}\frac{\partial I}{\partial y} + \mu\left(1 - \frac{1}{P_r}\right)\frac{1}{2}\frac{\partial(u^2)}{\partial y}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{1}{L} - 1\right)\sum_i V_{iy} h_i\right] \qquad (10.21)$$

Le (*10.19*), (*10.20*), (*10.21*) valgono per il moto laminare. Assumeremo che valgano anche per per il moto turbolento, finché attribuiamo dei valori istantanei alle variabili dipendenti contenute nelle equazioni.

Nella loro forma attuale comunque non sembra che ci sia molta speranza di risolvere le equazioni in funzione dello spazio e del tempo, anche per moti semplici. Useremo perciò il metodo visto nel capitolo 9 per ricavare delle equazioni associate, che riguardino delle grandezze mediate nel tempo.

Scriveremo i termini istantanei nel modo che segue, in funzione di grandezze mediate nel tempo e fluttuanti:

$$u = \bar{u} + u' \qquad C_i = \bar{C}_i + C_i'$$
$$\rho u = \overline{\rho u} + (\rho u)' \qquad h_i = \bar{h}_i + h_i'$$
$$\rho v = \overline{\rho v} + (\rho v)' \qquad \rho V_{iy} = \overline{\rho V_{iy}} + (\rho V_{iy})'$$
$$h = \bar{h} + h'$$

nelle quali la sovralineatura indica dei valori mediati nel tempo, l'apice indica delle grandezze fluttuanti. Sostituiamo adesso queste espressioni nell'equazione di continuità e nelle (*10.19*), (*10.20*), (*10.21*), prendendo poi la media temporale. Otteniamo:

Continuità totale:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\overline{\rho u}) + \frac{\partial}{\partial y}(\overline{\rho v}) = 0 \qquad (10.22)$$

Continuità della specie:

$$\overline{\rho u}\frac{\partial \bar{C}_i}{\partial x} + \overline{\rho v}\frac{\partial \bar{C}_i}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\bar{\rho} D_{12}\frac{\partial \bar{C}_i}{\partial y} - \overline{(\rho v)' C_i'}\right] + \dot{w}_i \qquad (10.23)$$

nella quale si assumeva $\frac{\partial}{\partial x}\overline{[(\rho u)' C_i']} \ll \frac{\partial}{\partial y}\overline{[(\rho v)' C_i']}$ e $\overline{[(\rho V_{iy})' C_i']} \ll [\overline{\rho V_{iy}}\,\bar{C}_i]$.

Quantità di moto:

$$\overline{\rho u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \overline{\rho v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \overline{(\rho v)' u'}\right] \qquad (10.24)$$

nella quale si assume $\frac{\partial}{\partial x}\overline{[(\rho u)' u']} \ll \frac{\partial}{\partial y}\overline{[(\rho v)' u']}$.

Energia:

$$\overline{\rho u}\frac{\partial \bar{h}}{\partial x} + \overline{\rho v}\frac{\partial \bar{h}}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)^2 - \overline{(\rho v)'u'}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$$
$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left[\kappa\frac{\partial \bar{T}}{\partial y} - \sum_i \bar{h}_i \overline{\rho_i V_{iy}} - \sum_i \bar{C}_i \overline{h_i'(\rho v)'} - \sum_i \overline{(\rho v)'C_i'}\,\bar{h}_i\right] \qquad (10.25)$$

E' interessante notare che,come risultato delle fluttuazioni della turbolenza, nelle equazioni compaiono dei termini addizionali dal preciso significato fisico; per esempio

$-\overline{(\rho v)'C_i'}$ è il trasferimento turbolento di massa

$-\overline{(\rho v)'u'}$ è il trasferimento turbolento di quantità di moto

$-\overline{(\rho v)'h_i'}$ è il trasferimento turbolento di energia

Dopo alcune elaborazioni algebriche, e definendo dei nuovi termini

$$\epsilon = -\frac{\overline{(\rho v)'u'}}{\partial \bar{u}/\partial y}, \quad \epsilon_T = -\frac{\overline{(\rho v)'h_i'}}{\partial \bar{T}/\partial y}, \quad \bar{\rho}D_T = -\frac{\overline{(\rho v)'C_i'}}{\partial \bar{C}_i/\partial y},$$
$$P_{rT} = \frac{c_{pf}\epsilon}{\epsilon_T}, \quad L_T = \frac{c_{pf}\bar{\rho}D_T}{\epsilon_T}$$

abbiamo

Continuità della specie:

$$\overline{\rho u}\frac{\partial \bar{C}_i}{\partial x} + \overline{\rho v}\frac{\partial \bar{C}_i}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[(\rho D_{12} + \rho D_T)\frac{\partial \bar{C}_i}{\partial y}\right] + \dot{w}_i \qquad (10.26)$$

Quantità di moto:

$$\overline{\rho u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \overline{\rho v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[(\mu + \epsilon)\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right] \qquad (10.27)$$

Energia:

$$\overline{\rho u}\frac{\partial \bar{h}}{\partial x} + \overline{\rho v}\frac{\partial \bar{h}}{\partial y} = (\mu + \epsilon)\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\mu}{P_r} + \frac{\epsilon}{P_{rT}}\right)\frac{\partial \bar{h}}{\partial y}\right]$$
$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left\{\left[\frac{\kappa}{c_{pf}}(L-1) + \frac{\epsilon_T}{c_{pf}}(L_T - 1)\right]\sum_i h_i\frac{\partial \bar{C}_i}{\partial y}\right\} \qquad (10.28)$$

Le equazioni sono ora espresse in funzione dei coefficienti microscopici e macroscopici di trasporto; le loro soluzioni sono presentate nel rif. 1 di pag. 203. Il procedimento generale è di considerare il caso semplice in cui

$$P_r = P_{rT} = L = L_T = 1{,}0$$

I risultati vengono poi estesi al caso più generale.

10.5 SOMMARIO E DISCUSSIONE

Lo strato limite reagente turbolento è uno dei problemi più complicati della meccanica dei fluidi, un problema che certo verrà approfondito man mano che ci addentriamo nell'era spaziale.

Abbiamo nelle equazioni due tipi di coefficienti di trasporto. I coefficienti μ, κ e D_{12} sono dovuti ad effetti microscopici e sono caratteristici del fluido: non dipendono dalle condizioni della corrente. I coefficienti ϵ, ϵ_T e D_T risultano da effetti macroscopici e non sono caratteristici del fluido; dipendono dalle condizioni del moto e vanno considerati come incognite nelle equazioni, proprio come la velocità, l'entropia, ecc. La determinazione dei coefficienti di trasporto (micro e macroscopici) rimane uno dei maggiori problemi nel moto di strato limite ipersonico turbolento.

BIBLIOGRAFIA

1. Dorrance W. H., *Viscous Hypersonic Flow*, McGraw-Hill, 1962.
2. Chapman S., Cowling T. G., *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases*, Cambridge University Press, 1958.
3. Hirschfelder J. O., Curtiss C. F., Bird R. B., *Molecular Theory of Gases and Liquids*, John Wiley, 1954.
4. Fay J. A., Riddell F. R., "Theory of Stagnation Point Heat Transfer in Dissociated Air", *J. Aero. Sci.*, 25, No. 2, pp. 73-85, 1958.
5. Lees L., "Laminar Heat Transfer over Blunt Nosed Bodies at Hypersonic Flight Speeds", *Jet Propulsion*, aprile, 1956.
6. Schlichting H., *Boundary Layer Theory*, McGraw-Hill, 1960.
7. Hall J. G. (a cura di), *Fundamental Phenomena in Hypersonic Flow*, Cornell University Press, 1966.
8. Eula A., *Lezioni di Aerodinamica*, Università di Roma, 1958.

Il lettore che desidera approfondire le correnti ipersoniche può trovare nel rif. 1 introduzioni e discussioni eccellenti dei vari problemi. Il rif. 7 considera alcuni importanti problemi, specifici del moto ipersonico. I due libri riportano le pubblicazioni più importanti, uscite sull'argomento.

NOMENCLATURA USATA NEL CAPITOLO 10

C_f = coefficiente d'attrito superficiale

C_i = frazione di massa della specie

c_p = calore specifico a pressione costante

c_{pi} = calore specifico a pressione costante per la specie *i*

c_{pA} = calore specifico a pressione costante per atomi

c_{pf} = calore specifico congelato, $\sum_i C_i c_{pi}$, a pressione costante

C_{pM} = calore specifico a pressione costante, per le molecole

c_{vi} = calore specifico a volume costante per la specie *i*

D_{12} = coefficiente di diffusione binario

D_T = coefficiente di diffusione turbolento

e_i = energia interna specifica della specie *i*

h = entalpia specifica

h_i = entalpia specifica della specie *i*

h_i^0 = entalpia specifica di formazione della specie *i*

h_w = entalpia specifica alla parete

h_∞ = entalpia specifica di corrente indisturbata

I	=	$u^2/2 + h$, entalpia specifica totale, o di ristagno
L	=	numero di Lewis
L_T	=	numero di Lewis turbolento
M	=	numero di Mach
p	=	pressione
p_i	=	pressione parziale della specie i
P_r	=	numero di Prandtl = $\mu c_{pf}/\kappa$
P_T	=	numero di Prandtl turbolento
q	=	flusso di calore in direzione y
$\overline{R}$	=	costante dei gas complessiva = $\sum_i C_i R_i$
R_i	=	costante dei gas per la specie i
t	=	tempo
T	=	temperatura
T_∞	=	temperatura in corrente indisturbata
u	=	velocità media di massa in direzione x
U_∞	=	velocità della corrente indisturbata
v	=	velocità media di massa in direzione y
$\mathbf{V}$	=	velocità media di massa = $\dfrac{\sum_i C_i \rho_i \mathbf{v}_i}{\sum_i C_i \rho_i}$
V_{iy}	=	velocità di diffusione della specie i in direzione y
$\mathbf{V}_i$	=	velocità di diffusione della specie i
$\mathbf{v}_i$	=	velocità media della specie i
w	=	velocità media di massa in direzione z
$\dot{w}_i$	=	velocità di produzione di massa della specie i per unità di volume (per reazione chimica)
x, y, z	=	coordinate
α	=	frazione in massa degli atomi
α_∞	=	frazione in massa degli atomi nella corrente indisturbata
α_w	=	frazione in massa degli atomi alla parete
ϵ	=	viscosità turbolenta
ϵ_T	=	coefficiente di trasferimento dell'energia turbolenta
κ	=	conducibilità termica
μ	=	viscosità
ρ	=	densità
ρ_A	=	densità degli atomi
ρ_M	=	densità delle molecole
τ_{yx}	=	sforzo di taglio
$(\,)_A$	=	si riferisce alle proprietà di un atomo
$(\,)_M$	=	si riferisce alle proprietà di una molecola
$(\,)_w$	=	si riferisce alle proprietà in corrispondenza alla parete
$(\,)_\infty$	=	si riferisce alle proprietà in corrente indisturbata.

CAPITOLO 11

Magnetoidrodinamica

11.1 INTRODUZIONE

La magnetoidrodinamica (MID) è una branca relativamente nuova, ma importante, della fluidodinamica; essa studia i mutui effetti di fluidi conduttori con i campi elettromagnetici. Se un fluido, conduttore elettrico, si muove in un campo magnetico si può indurre un campo elettrico e quindi una corrente; reciprocamente, la corrente interagisce con il campo magnetico producendo una forza di massa sul fluido.

Queste interazioni si verificano sia in natura che nell'opera dell'uomo; abbiamo MID nel sole, all'interno della terra, nella ionosfera, nelle stelle e nella loro atmosfera, tanto per fare qualche esempio. In laboratorio sono stati realizzati dei sistemi che utilizzano direttamente le interazioni della MID, e sono delle unità propulsive e dei generatori di potenza; oppure altri che implicano delle interazioni tra campi fluidodinamici ed elettromagnetici, e abbiamo le applicazioni dei fasci di elettroni, i tubi a onde viaggianti, le scariche elettriche e così via.

Esistono due modi fondamentali di accostarsi al problema: il modello fluido continuo e macroscopico, costituito dalla MID, e il modello statistico microscopico che è alla base della dinamica del plasma. Qui ci occuperemo solo della MID: liquidi che conducono l'elettricità e gas ionizzati abbastanza densi.

11.2 ELETTRODINAMICA DEI MEZZI IN MOTO

Prima che si cominci a studiare la MID è necessaria una completa comprensione della classica teoria dei campi elettromagnetici. Qui ne presentiamo un breve sommario, anche se partiamo dalla presunzione che il lettore abbia già qualche familiarità con le equazioni di Maxwell.

Le leggi fondamentali della teoria elettromagnetica si possono porre nella forma matematica, nota con il nome complessivo di equazioni di Maxwell: esse collegano tra loro le grandezze fondamentali del campo, e mostrano come vengono generate. Per la completa descrizione di un sistema elettromagnetico, dopo aver introdotto le equazioni di Maxwell dobbiamo collegare le grandezze del campo, viste da osservatori in moto relativo. Sono tutte leggi comprese nella teoria speciale della Relatività, ma qui ci limiteremo ai problemi non relativistici: assumeremo sempre cioè che tutte le velocità siano piccole rispetto alla velocità della luce c (matematicamente, $V^2/c^2 \ll 1$); useremo sempre le unità RMKS (del sistema MKS razionalizzato).

(*a*) **Le equazioni di Maxwell.**

Ecco le quattro equazioni fondamentali di Maxwell. Il campo di spostamento **D** è dato dalla equazione della sorgente

$$\int_{\mathcal{V}} \rho_e \, d\mathcal{V} = \int_A \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} \qquad (11.1a)$$

dalla quale si vede che la densità di carica spaziale vera ρ_e genera il campo totale **D**. Le linee di corrente di quest'ultimo debbono sempre finire nelle cariche: non possono semplicemente sparire nello spazio. In forma differenziale

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e \qquad (11.1b)$$

L'equazione della sorgente per il campo magnetico **H** è nota come legge di Ampère:

$$\oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} \;=\; \int_A \mathbf{J}\cdot d\mathbf{A} + \int_A \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\cdot d\mathbf{A} \qquad (11.2a)$$

con **J** densità vera di corrente e $\partial\mathbf{D}/\partial t$ corrente di spostamento. In forma differenziale,

$$\nabla\times\mathbf{H} \;=\; \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \qquad (11.2b)$$

La legge di Faraday afferma

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} \;=\; -\int_A \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{A} \qquad (11.3a)$$

ovvero

$$\nabla\times\mathbf{E} \;=\; -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad (11.3b)$$

Infine, per il campo **B** di induzione magnetica,

$$\int_A \mathbf{B}\cdot d\mathbf{A} \;=\; 0 \qquad (11.4a)$$

dalla quale si vede che tutte le linee di corrente di **B** debbono chiudersi su se stesse. In forma differenziale,

$$\nabla\cdot\mathbf{B} \;=\; 0 \qquad (11.4b)$$

Queste equazioni di Maxwell sussistono per qualsiasi osservatore, senza riguardo se sia fermo o in moto, finché misura le grandezze del campo nel suo proprio sistema di riferimento. Queste equazioni, che conservano la stessa forma a prescindere dal moto relativo dei vari osservatori, si dicono covarianti. Le grandezze di campo misurate dai vari osservatori sono collegate dalle trasformazioni di Lorentz. Tra i vari osservatori in moto relativo sarà anche necessario collegare, con le stesse trasformazioni di Lorentz, le grandezze massa, lunghezza, tempo e le loro derivate. Per velocità basse (rispetto a quella della luce) le trasformazioni che riguardano la distanza (tempo e massa allora sono gli stessi) sono galileiane, ma anche così le grandezze del campo elettromagnetico debbono essere collegate tra loro dalle trasformazioni di Lorentz al limite di bassa velocità: trasformazioni che possono essere ricavate dai principi della relatività speciale. Si parte dal postulato dell'invarianza della velocità della luce, e della covarianza delle leggi naturali: conseguono tutte le appropriate trasformazioni, ma non le ricaveremo qui.

Consideriamo i due sistemi di riferimento S e S' di fig. 11-1: S' si muove rispetto ad S con velocità **V**. Con S' indicheremo sempre il sistema solidale con il mezzo materiale, così che l'osservatore in S' si muoverà localmente con il mezzo stesso (fluido in MID). Nel sistema solidale con il mezzo (e di solito solo in esso) si possono scrivere le necessarie equazioni costitutive, che collegano **D**′ a **E**′, **B**′ ad **H**′, e si ammette di solito che comprendano anche la legge di Ohm, che collega **J**′ ad **E**′. Indichiamo con gli apici le grandezze misurate rispetto al sistema di riferimento solidale con il mezzo. Possiamo allora scrivere

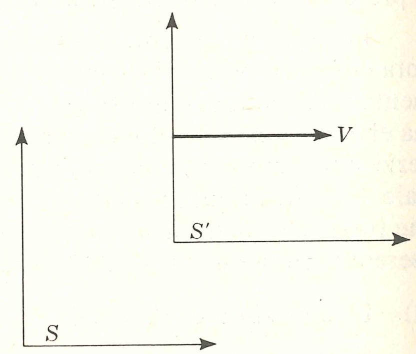


Fig. 11-1. Osservatori in moto relativo. S' si muove con velocità **V** rispetto S.

$$\begin{aligned} \mathbf{D}' &= \epsilon\mathbf{E}' = \epsilon_0\kappa\mathbf{E}' = \mathbf{P}' + \epsilon_0\mathbf{E}' \\ \mathbf{B}' &= \mu\mathbf{H}' = \mu_0\kappa_m\mathbf{H}' = \mu_0(\mathbf{H}'+\mathbf{M}') \\ \mathbf{J}' &= \sigma\mathbf{E}' \end{aligned} \qquad (11.5)$$

in cui ϵ è la permittività, ϵ_0 la permittività dello spazio libero (del vuoto), κ la permittività relativa. Similmente μ è la permeabilità,[1] μ_0 la permeabilità nello spazio libero, κ_m la permeabilità relativa,

[1] In questo capitolo indichiamo con μ_f la viscosità, per evitare confusione con la permeabilità.

σ la conduttività elettrica scalare. **P** è la polarizzazione, **M** la magnetizzazione. Le prime due equazioni di (*11.5*) sono generalmente vere, essendo ϵ e μ solo funzioni di temperatura e pressione nei mezzi lineari, e funzioni anche dei campi se il materiale non è lineare. La legge di Ohm è un'equazione fenomenologica, e non è generalmente vera. La forma qui data di un σ scalare va bene per liquidi e gas densi, ma nei gas rarefatti la conduttività diventa un tensore.

In qualsiasi sistema di riferimento possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{P} + \epsilon_0\mathbf{E} \\ \mathbf{B} &= \mu_0(\mathbf{M}+\mathbf{H}) \end{aligned} \qquad (11.6)$$

la (*11.5*) essendo però vera nel sistema solidale con il mezzo. Nello spazio libero (nel vuoto), o in un mezzo in cui $\kappa = \kappa_m = 1$ vediamo che $\mathbf{P} = \mathbf{M} = 0$ e perciò

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon_0\mathbf{E} \\ \mathbf{B} &= \mu_0\mathbf{H} \end{aligned} \qquad (11.7)$$

in qualsiasi sistema di riferimento.

In qualsiasi problema di MID abbiamo di solito bisogno di tutte e quattro le equazioni di Maxwell, più le equazioni costitutive. Di solito tuttavia conviene usare, invece della $\nabla\cdot\mathbf{D} = \rho_e$, l'equazione

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{J} \;=\; 0 \qquad (11.8)$$

(oppure, nel moto permanente o nei casi in cui ρ_e è trascurabile, $\nabla\cdot\mathbf{J} = 0$, come succede in MID). La (*11.8*) segue direttamente dalle equazioni di Maxwell, e non è indipendente.

(*b*) **Le trasformazioni di Lorentz.**

Elenchiamo qui sotto le trasformazioni di Lorentz. **V** è la velocità del sistema solidale con il mezzo S' rispetto ad S; $\perp$ e $\parallel$ indicano le componenti delle grandezze, rispettivamente perpendicolari e parallele al vettore **V**.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_\perp &= \beta(\mathbf{E} + \mathbf{V}\times\mathbf{B})_\perp & \mathbf{E}'_\parallel &= \mathbf{E}_\parallel \\ \mathbf{D}'_\perp &= \beta(\mathbf{D} + \mathbf{V}\times\mathbf{H}/c^2)_\perp & \mathbf{D}'_\parallel &= \mathbf{D}_\parallel \\ \mathbf{H}'_\perp &= \beta(\mathbf{H} - \mathbf{V}\times\mathbf{D})_\perp & \mathbf{H}'_\parallel &= \mathbf{H}_\parallel \\ \mathbf{B}'_\perp &= \beta(\mathbf{B} - \mathbf{V}\times\mathbf{E}/c^2)_\perp & \mathbf{B}'_\parallel &= \mathbf{B}_\parallel \\ \mathbf{J}'_\perp &= \mathbf{J}_\perp & \mathbf{J}'_\parallel &= \beta(\mathbf{J} - \rho_e\mathbf{V})_\parallel \\ \rho'_e &= \beta(\rho_e - \mathbf{V}\cdot\mathbf{J}/c^2) & & \\ \mathbf{P}'_\perp &= \beta(\mathbf{P} - \mathbf{V}\times\mathbf{M}/c^2)_\perp & \mathbf{P}'_\parallel &= \mathbf{P}_\parallel \\ \mathbf{M}'_\perp &= \beta(\mathbf{M} + \mathbf{V}\times\mathbf{P})_\perp & \mathbf{M}'_\parallel &= \mathbf{M}_\parallel \end{aligned} \qquad (11.9)$$

in cui $\beta = 1/\sqrt{1 - V^2/c^2}$.

Nel limite non relativistico, che è il caso che interessa la MID, le trasformazioni si riducono a

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \mathbf{E} + \mathbf{V}\times\mathbf{B} & \mathbf{J}' &= \mathbf{J} - \rho_e\mathbf{V} \\ \mathbf{D}' &= \mathbf{D} + \mathbf{V}\times\mathbf{H}/c^2 & \rho'_e &= \rho_e - \mathbf{V}\cdot\mathbf{J}/c^2 \\ \mathbf{H}' &= \mathbf{H} - \mathbf{V}\times\mathbf{D} & \mathbf{P}' &= \mathbf{P} - \mathbf{V}\times\mathbf{M}/c^2 \\ \mathbf{B}' &= \mathbf{B} - \mathbf{V}\times\mathbf{E}/c^2 & \mathbf{M}' &= \mathbf{M} + \mathbf{V}\times\mathbf{P} \end{aligned} \qquad (11.10)$$

(*c*) **Le condizioni al contorno.**

Le condizioni al contorno in corrispondenza di una interfaccia per le grandezze di campo sono uguali a quelle del mezzo stazionario. In qualsiasi sistema di riferimento, attraverso l'interfaccia sussistono le seguenti condizioni, che scriviamo con *tutte* le grandezze di campo misurate in un sistema arbitrario di riferimento. (Vedi fig. 11-2.)

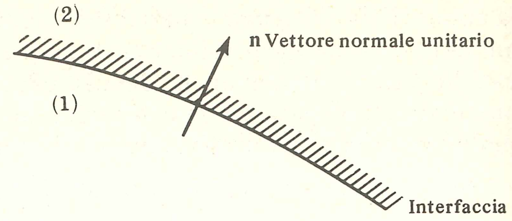


Fig. 11-2. Interfaccia tra due mezzi, 1 e 2.

$$\mathbf{n}\times(\mathbf{E}_2-\mathbf{E}_1) = 0 \qquad \mathbf{n}\times(\mathbf{H}_2-\mathbf{H}_1) = \mathbf{J}_s$$
$$\mathbf{n}\cdot(\mathbf{D}_2-\mathbf{D}_1) = \rho_s \qquad \mathbf{n}\cdot(\mathbf{B}_2-\mathbf{B}_1) = 0 \qquad (11.11)$$

in cui ρ_s è la densità di carica superficiale all'interfaccia, e $\mathbf{J}_s$ la corrente superficiale sulla predetta. Fisicamente allora la componente tangenziale di **E** e la componente normale di **B** sono continue attraverso l'interfaccia. La componente tangenziale di **H** presenta invece un salto se c'è una corrente superficiale, e lo stesso succede alla componente normale di **D** se esiste una carica superficiale.

11.3 FORZA ELETTROMOTRICE (emf) INDOTTA. DIFFERENZA DI POTENZIALE AI TERMINALI

Nei problemi di MID ci si deve spesso occupare del potenziale, o della differenza di potenziale (d.d.p.) terminale tra due elettrodi, quando un fluido elettricamente conduttore scorre attraverso di essi.

Si definisce in genere la forza elettromotrice (emf) in un circuito chiuso (nel riferimento di laboratorio nel quale localizziamo i terminali)

$$\text{emf} = \oint \mathbf{E}'\cdot d\mathbf{l} \qquad (11.12)$$

in cui $\mathbf{E}'$ è il campo elettrico locale visto da un osservatore che si sposta con il fluido, mentre $d\mathbf{l}$ è fisso nel sistema di riferimento di laboratorio. Usando le equazioni di Maxwell e le trasformazioni non relativistiche di Lorentz otteniamo

$$\text{emf} = \oint (\mathbf{V}\times\mathbf{B})\cdot d\mathbf{l} - \int_A \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{A} \qquad (11.13)$$

in cui $\partial\mathbf{B}/\partial t$ *non* deve esser preso al di fuori dell'integrale. **V** è la velocità del conduttore che coincide istantaneamente con $d\mathbf{l}$.

Il potenziale terminale V_{AB} è allora pari alla emf meno la caduta IR tra gli elettrodi A e B:

$$V_{AB} = \text{emf} - \int_A^B \mathbf{E}'\cdot d\mathbf{l} \qquad (11.14)$$

in cui V_{AB} è la tensione in B rispetto ad A; l'integrale lineare è preso tra gli elettrodi, attraverso il fluido. Bisogna notare che la emf può dipendere dal cammino d'integrazione scelto per trovarla (nei sistemi in corrente alternata possono esser presenti delle correnti parassite), ma il potenziale terminale è sempre indipendente dal cammino suddetto.

In problemi di MID permanente: generatori, pompe, ecc. otteniamo per la (*11.14*) una forma semplificata che deriva dal fatto che $\partial/\partial t = 0$ più le trasformazioni di Lorentz. Abbiamo

$$V_{AB} = -\int_A^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} \qquad (11.15)$$

Notiamo che nella (*11.15*) **E** viene misurato nel sistema di riferimento di laboratorio; la (*11.15*) viene anche dal fatto che $\nabla\times\mathbf{E} = 0$ in condizioni permanenti, e quindi $\mathbf{E} = -\nabla\phi$, da cui

$$\phi_{AB} = -\int_A^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$$

e ϕ è il potenziale, identico a V_{AB}.

11.4 LA FORZA ELETTROMAGNETICA DI MASSA

La forza elettromagnetica di massa si può ricavare dalla legge della forza di Coulomb, visto che fondamentalmente questa è la sola interazione che si verifica.

La forza elettromagnetica che agisce su di una particella di carica q, nel riferimento locale, solidale con la particella stessa, è $\mathbf{F} = q\mathbf{E}'$. Se ora ci trasferiamo nel sistema di riferimento di laboratorio, $\mathbf{E}' = \mathbf{E}+\mathbf{V}\times\mathbf{B}$ (non relativistico), così che $\mathbf{F} = q(\mathbf{E}+\mathbf{V}\times\mathbf{B})$ e questa è la familiare legge della forza di Lorentz. **V** è la velocità della particella, rispetto al sistema di riferimento di laboratorio.

(*a*) **La forza di massa in un fluido.**

La forza elettromagnetica di massa complessiva in un fluido conduttore si può ricavare microscopicamente dalla legge di Coulomb, o con un criterio basato su lavoro virtuale ed energia. Qui vedremo solo il risultato: la densità di forza di massa (forza per unità di volume), $\mathbf{f}_e'$ nel sistema di riferimento solidale con il mezzo (sono state usate le equazioni costitutive) è

$$\mathbf{f}_e' = \rho_e'\mathbf{E}' + \mathbf{J}'\times\mathbf{B}' - \tfrac{1}{2}\epsilon_0 E'^2\nabla'\kappa - \tfrac{1}{2}\mu_0 H'^2\nabla'\kappa_m$$
$$+ \tfrac{1}{2}\epsilon_0\nabla'\left(E'^2\frac{\partial\kappa}{\partial\rho}\rho\right) + \tfrac{1}{2}\mu_0\nabla'\left(H'^2\frac{\partial\kappa_m}{\partial\rho}\rho\right) \qquad (11.16)$$

In MID tuttavia hanno importanza solo i primi due termini, che sono covarianti: la loro espressione sussiste in qualsiasi sistema di riferimento. In MID allora:

$$\mathbf{f}_e = \rho_e\mathbf{E} + \mathbf{J}\times\mathbf{B} \qquad (11.17)$$

e dal punto di vista non relativistico, $\mathbf{f}_e = \mathbf{f}_e'$ così che possiamo calcolare $\rho_e'\mathbf{E}' + \mathbf{J}'\times\mathbf{B}'$ ovvero $\rho_e\mathbf{E} + \mathbf{J}\times\mathbf{B}$, ottenendo lo stesso risultato numerico. Come vedremo, $\rho_e\mathbf{E}$ è di solito trascurabile rispetto a $\mathbf{J}\times\mathbf{B}$.

(*b*) **Tensore degli sforzi.**

Una descrizione alternativa, ma equivalente, della forza di massa è data dal tensore degli sforzi elettromagnetico T_{ij}. La forza di massa allora è $f_j = \dfrac{\partial T_{ij}}{\partial x_i} - \dfrac{\partial g_j}{\partial t}$; dove g_i è il vettore flusso della quantità di moto elettromagnetica. Un'espressione covariante di T_{ij} (trascurando gli effetti di strizione) è

$$T_{ij} = -\tfrac{1}{2}(\mathbf{D}\cdot\mathbf{E} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{H})\delta_{ij} + D_iE_j + B_iH_j \qquad (11.18)$$

A tutti gli scopi pratici il termine $\partial g_i/\partial t$ è trascurabile, e nella MID non se ne tiene conto. L'applicazione più importante del concetto di tensore degli sforzi è l'interpretazione fisica della forza di massa che esso permette di fare; se ne diagonalizziamo la matrice (determinando così gli sforzi principali) otteniamo un risultato interessante. Nelle ipotesi, valide in MID, che i termini elettrici del tensore degli sforzi siano trascurabili, e B ed H siano paralleli (e lo saranno sia nel riferimento solidale con il mezzo che in qualsiasi altro riferimento della MID, dato che ivi $\mathbf{B} = \mathbf{B}'$ e $\mathbf{H} = \mathbf{H}'$, per velocità non relativistiche) abbiamo come risultato che i tre sforzi principali λ_i sono

$$\lambda_1 = \tfrac{1}{2}\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}, \qquad \lambda_2 = \lambda_3 = -\tfrac{1}{2}\mathbf{H}\cdot\mathbf{B} \qquad (11.19)$$

e gli assi principali sono orientati in modo che λ_1 è una trazione lungo le linee di forza magnetiche, mentre λ_2 e λ_3 rappresentano una compressione normale alle linee di campo. Possiamo altrimenti dire che esiste una compressione idrostatica $\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}/2$, con una trazione $\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}$ (lungo le linee di campo) sovrapposta alla compressione idrostatica.

Il concetto di pressione magnetica si basa su questi risultati. Dobbiamo ricordare comunque che questa forza di massa non è fisicamente una trazione, o pressione nel fluido, ma entra come forza di massa nell'equazione della quantità di moto, e di conseguenza può generare degli sforzi meccanici. Per l'equilibrio statico, il gradiente di pressione dev'essere bilanciato dalla divergenza tensoriale del tensore degli sforzi elettromagnetico (che, fisicamente, è una forza di massa). Siamo nella stessa situazione della pressione che si genera in un fluido in quiete, a causa del campo gravitazionale.

Un altro modo per arrivare al concetto di pressione magnetica è di scrivere la forza di massa $\mathbf{J}\times\mathbf{B}$ come $(\nabla\times\mathbf{H})\times\mathbf{B}$ (in cui abbiamo usato l'equazione di Maxwell $\nabla\times\mathbf{H} = \mathbf{J}+\dot{\mathbf{D}}$ e D, come mostreremo, è trascurabile). La $(\nabla\times\mathbf{H})\times\mathbf{B}$ si può scrivere (usando la $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$)

$$(\nabla\times\mathbf{H})\times\mathbf{B} = -\nabla\left(\frac{B^2}{2\mu}\right) + \frac{1}{\mu}(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B} \qquad (11.20)$$

Dunque il primo termine a destra è la parte irrotazionale della forza di massa e si aggiunge direttamente alla pressione nell'equazione della quantità di moto, il secondo termine è la parte rotazionale (che corrisponde alla trazione esercitata lungo le linee di flusso magnetiche) e in MID è generalmente diversa da zero.

11.5 CONCETTI FONDAMENTALI SUL MOTO IN MID

Rivediamo ora i fondamenti della MID, con i principi e le equazioni più importanti.

(*a*) **Ipotesi.**

Le ipotesi che di solito si fanno in MID sono le seguenti:

1. Tutte le velocità sono piccole rispetto a quella della luce: $V^2/c^2 \ll 1$.
2. Il campo elettrico è dell'ordine di $\mathbf{V}\times\mathbf{B}$. Tutti i campi E interessati sono indotti, o dello stesso ordine del campo indotto. Dobbiamo sempre scrivere $\mathbf{E}' = \mathbf{E}+\mathbf{V}\times\mathbf{B}$, distinguendo tra E' ed E.
3. $\mathbf{H}\cong\mathbf{H}'$ e $\mathbf{B}\cong\mathbf{B}'$, dato che
$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} - \frac{\mathbf{V}\times\mathbf{E}}{c^2} \cong \mathbf{B} - 0\left[\frac{V^2}{c^2}\mathbf{B}\right]$$
I metalli liquidi e i gas ionizzati hanno permeabilità μ_0, e quindi scriviamo $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}$ in qualsiasi sistema di riferimento.
4. La corrente di spostamento $\dot{\mathbf{D}}$ è trascurabile rispetto a J.
5. La legge di Ohm è $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}' = \sigma(\mathbf{E}+\mathbf{V}\times\mathbf{B})$, e $\mathbf{J}'\cong\mathbf{J}$ essendo $\rho_e\mathbf{V}$ trascurabile rispetto a $\sigma(\mathbf{E}+\mathbf{V}\times\mathbf{B})$.
6. La carica spaziale ρ_e' è zero, ma $\rho_e \neq 0$. Dobbiamo scrivere $\nabla\cdot\mathbf{D} = \rho_e$, e *non* uguagliare a zero $\nabla\cdot\mathbf{D}$. Dato che ρ_e non è di solito conosciuta, $\nabla\cdot\mathbf{D} = \rho_e$ non è un'equazione utile. E' meglio, e più conveniente, usare $\nabla\cdot\mathbf{J} = 0$ (anche in problemi non permanenti, perché il trasporto di carica nello spazio è trascurabile rispetto a J).
7. La forza $\rho_e\mathbf{E}$ è trascurabile rispetto a $\mathbf{J}\times\mathbf{B}$. Sforzo elettrico ed energia, proporzionali a $\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}$, sono trascurabili rispetto $\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}$.
8. Per alta conducibilità, $\sigma\to\infty$, la legge di Ohm indica che per una J finita si ha J, $\mathbf{E}' = 0$, e $\mathbf{E} = -\mathbf{V}\times\mathbf{B}$. La corrente è allora determinata dalla $\nabla\times\mathbf{H} = \mathbf{J}$ e non dalla legge di Ohm.

(*b*) **Equazioni.**

Le equazioni fondamentali della MID si possono allora scrivere sotto forma delle equazioni di Maxwell, la legge di Ohm, l'equazione di continuità, l'equazione del moto con la forza di massa $\mathbf{J}\times\mathbf{B}$, e l'equazione dell'energia con immissione di calore per effetto Joule. Dobbiamo inoltre usare le trasformazioni non relativistiche di Lorentz. Nelle approssimazioni della MID possiamo

sempre usare l'equazione di stato dei gas perfetti. Elenchiamo le equazioni ora dette:

Maxwell:

$$\left.\begin{aligned}\nabla\times\mathbf{H} &= \mathbf{J}\\ \nabla\cdot\mathbf{B} &= 0\\ \nabla\times\mathbf{E} &= -\partial\mathbf{B}/\partial t\\ \nabla\cdot\mathbf{J} &= 0\end{aligned}\right\} \qquad (11.21)$$

Legge di Ohm:

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E}+\mathbf{V}\times\mathbf{B}) \qquad (11.22)$$

Moto:

$$\begin{aligned}\rho\left[\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}+(\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V}\right] &= -\nabla p + \nabla\cdot\tau + \mathbf{J}\times\mathbf{B} - \rho\nabla\psi\\ &= -\nabla(p+B^2/2\mu) + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B}/\mu + \nabla\cdot\tau - \rho\nabla\psi\end{aligned} \qquad (11.23)$$

in cui τ è il tensore degli sforzi meccanico, e ψ il potenziale gravitazionale.

Energia:

$$\rho\frac{Du}{Dt} = -p\nabla\cdot\mathbf{V} + \kappa_T\nabla^2 T + \Phi + \mathbf{E}'\cdot\mathbf{J}' \qquad (11.24)$$

Usiamo qui κ_T per la conducibilità termica, per evitare confusioni con la permittività relativa; u è l'energia interna specifica. Il riscaldamento per effetto Joule ($\mathbf{E}'\cdot\mathbf{J}'\cong\mathbf{E}'\cdot\mathbf{J} = J^2/\sigma$) è la sola interazione che riscontriamo se il materiale è lineare, cioè se ϵ e μ non sono funzioni della temperatura. Il lettore troverà una dettagliata analisi di questa equazione nel rif. 2 di pag.225.

Stato:

$$p = \rho RT \qquad (11.25)$$

(*c*) **Parametri.**

Le equazioni ora viste si possono mettere in forma adimensionale come visto nel capitolo 4, ricavando i relativi parametri fondamentali. Non riportiamo qui i calcoli, ma elenchiamo i parametri suddetti; oltre a quelli del moto ordinario (vedi capitolo 4) ve ne sono altri due, indipendenti. Elenchiamo adesso quelli non indipendenti.

R_m = Numero di Reynolds magnetico = $V_0 L\sigma\mu$, che misura il rapporto tra convezione e diffusione magnetiche. Se $R_m \ll 1$, si può dimostrare che il campo magnetico indotto è piccolo rispetto al campo magnetico applicato.

M_m = Numero di Mach magnetico = V_0/A, in cui A è la velocità di Alfvén, definita come $\sqrt{\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}/\rho}$: la discuteremo tra poco.

M = Numero di Hartmann = $\sqrt{\sigma B_0^2 L^2/\mu_f}$ = $\sqrt{N_R R_m/M_m}$, che misura il rapporto tra forza magnetica di massa e forza viscosa.

P_m = Numero di Prandtl magnetico = ν/η = R_m/N_R, che misura il rapporto tra diffusione vorticosa e diffusione magnetica.

N = Parametro interazione, che misura il rapporto tra forza magnetica di massa e forza d'inerzia. Se la conducibilità è finita N si prende pari a $\sigma B_0^2 L/\rho V_0 = R_m/M_m^2$; per conducibilità molto alta, o infinita, $N = M_m^{-2}$.

L'equazione del moto in direzione x diventa

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu_f \frac{d^2u}{dy^2} - \sigma(E_z + uB_0)B_0 \qquad (11.31)$$

che si può subito integrare con le condizioni al contorno

$$u = 0, \quad y = \pm y_0$$

per darci il seguente profilo di velocità

$$u = \frac{y_0^2}{M^2}\left(\frac{1}{\mu_f}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{M}{y_0}\sqrt{\frac{\sigma}{\mu_f}}E_z\right)\left(\frac{\cosh My/y_0}{\cosh M} - 1\right) \qquad (11.32)$$

in cui M, numero di Hartmann, vale $\sqrt{B_0^2 y_0^2 \sigma/\mu_f}$.

L'equazione del moto secondo le y è

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} + J_z B_x$$

e permette la determinazione di $\partial p/\partial y$, una volta che sia noto B_x, il campo magnetico indotto che troveremo appresso. Per la (*11.32*) e per la legge di Ohm troviamo J_z:

$$J_z = \sigma E_z \frac{\cosh My/y_0}{\cosh M} + \frac{y_0}{M}\sqrt{\frac{\sigma}{\mu_f}}\frac{\partial p}{\partial x}\left(\frac{\cosh My/y_0}{\cosh M} - 1\right) \qquad (11.33)$$

La corrente totale (per unità di lunghezza di canale in direzione x) è data dalla

$$\mathcal{J} = \int_{-y_0}^{+y_0} J_z\, dy = 2\sigma y_0 E_z \frac{\tanh M}{M} + \frac{2y_0^2}{M}\sqrt{\frac{\sigma}{\mu_f}}\frac{\partial p}{\partial x}\left(\frac{\tanh M}{M} - 1\right) \qquad (11.34)$$

La d.d.p. ai terminali V_t (tensione dell'elettrodo collocato in $+z_0$ rispetto a quello collocato in $-z_0$) è definita dalla

$$V_t = -\int_{-z_0}^{+z_0} E_z\, dz = -2z_0 E_z$$

e risolvendo rispetto E_z in funzione di $\mathcal{J}$, secondo la (*11.34*),

$$V_t = -\frac{z_0 M \mathcal{J}}{\sigma y_0 \tanh M} + \frac{2y_0 z_0}{M\sqrt{\sigma\mu_f}}\frac{\partial p}{\partial x}\left(1 - \frac{M}{\tanh M}\right) \qquad (11.35)$$

Ora possiamo costruire un circuito equivalente al nostro sistema, aggiungendo la tensione a circuito aperto in serie con la resistenza interna effettiva R_i, definita come rapporto tra tensione a circuito aperto $V_{t_{oc}}$ e corrente di corto circuito I_{sc}. Dalla (*11.35*) abbiamo $V_{t_{oc}}$ ponendo $\mathcal{J} = 0$:

$$V_{t_{oc}} = \frac{2y_0 z_0}{M\sqrt{\sigma\mu_f}}\frac{\partial p}{\partial x}\left(1 - \frac{M}{\tanh M}\right) \qquad (11.36)$$

(che è un numero negativo); I_{sc} si ricava ponendo $E_z = 0$ nella (*11.34*):

$$\mathcal{J}_{sc} = \frac{2y_0^2}{M}\sqrt{\frac{\sigma}{\mu_f}}\frac{\partial p}{\partial x}\left(\frac{\tanh M}{M} - 1\right) \qquad (11.37)$$

che è anche un numero negativo, e indica che la corrente scorre dal terminale $+z_0$ al $-z_0$ lungo il canale. Per un sistema allora che sia lungo L, I_{sc} (corrente totale di corto circuito per l'intero sistema) è pari a $L\mathcal{J}_{sc}$, così che R_i diventa

$$R_i = \frac{V_{t_{oc}}}{I_{sc}} = \frac{z_0}{L\sigma y_0}\frac{M}{\tanh M} \qquad (11.38)$$

Il circuito equivalente è allora, rispettando il teorema di Thévenin, quello di fig. 11-4. Ai terminali si può collegare, come mostrato in figura, un resistore di carico; con la legge di Kirchhoff abbiamo allora

$$V_{t_{oc}} + I(R_L + R_i) = 0 \qquad (11.39)$$

Notiamo che anche R_L può essere sostituita, questa volta da un generatore esterno. I segni di V_t ed I dipendono dalla presenza di un carico R_L o di un generatore esterni.

Il metodo ora visto si può usare per analizzare generatori, pompe, contatori in moti compressibili o incompressibili, per qualsiasi forma di canale, e serve di fondamento per l'analisi dei generatori in MID.

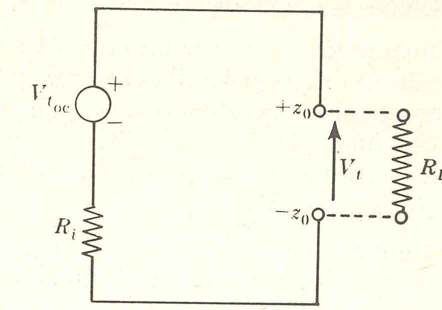


Fig. 11-4. Circuito equivalente a un sistema di correnti in MID, con la convenzione dei segni. Per il problema di Hartmann $V_{t_{oc}}$ è negativa, e quindi la polarità di $V_{t_{oc}}$ è l'inversa di quella in figura.

Ora possiamo trovare il campo magnetico indotto H_x con la $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$, essendo nota $\mathbf{J}$. Dalla (*11.33*),

$$\frac{dH_x}{dy} = -J_z = -\sigma E_z \frac{\cosh My/y_0}{\cosh M} - \frac{y_0}{M}\sqrt{\frac{\sigma}{\mu_f}}\frac{\partial p}{\partial x}\left(\frac{\cosh My/y_0}{\cosh M} - 1\right)$$

che si può integrare per trovare $H_x(y)$. La condizione al contorno dipende dalla configurazione geometrica del circuito di ritorno, e si può trovare applicando la legge del circuito di Ampère. Se il circuito di ritorno è simmetrico rispetto ad y (è cioè costituito dalle due piastre di fig. 11-3), il valore di $H_x(y = 0) = 0$, e H_x è antisimmetrico in y. H_x conserva un valore costante tra pareti isolanti e piastre del tragitto di ritorno, per poi cadere a zero attraverso le piastre stesse. Se integriamo l'equazione precedente otteniamo

$$H_x = \frac{y_0^2}{M}\sqrt{\frac{\sigma}{\mu_f}}\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{y}{y_0} - \left(\frac{y_0^2}{M}\sqrt{\frac{\sigma}{\mu_f}}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{I}{2L}\right)\frac{\sinh My/y_0}{\sinh M} \qquad (11.40)$$

Nel moto di Hartmann la velocità diminuisce all'aumentare del carico esterno R_L (per un numero di Hartmann assegnato). Se applichiamo una sorgente esterna di potenziale, la velocità può essere ulteriormente ridotta (al punto che il moto può svolgersi in contrasto al gradiente di pressione) o può essere aumentata, a seconda della polarità della tensione applicata. Per un valore di R_L prefissato, il profilo si appiattisce come in fig. 11-5, al crescere del numero di Hartmann. Se si applica una tensione esterna comunque la curva può anche diventare più ripida, invece di appiattirsi. In genere, un aumento del numero di Hartmann implica un aumento nell'interazione.

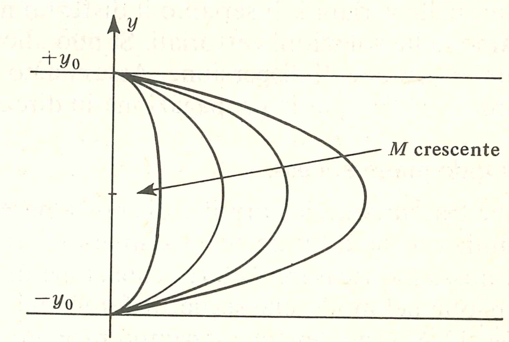


Fig. 11-5. Profilo di velocità in un moto di Hartmann, con un resistore di carico R_L e un gradiente di pressione costante.

Questa analisi del problema di Hartmann va bene per generatori e per pompe: il sistema può funzionare in dipendenza delle condizioni ai terminali e del gradiente di pressione. Sono metodi che verranno applicati al moto compressibile in un canale generatore di MID, nel paragrafo 11.7. Non vedremo qui l'estensione del problema a tubazioni, e a canali di sezione trasversale finita: è utile per questo il rif. 2, pag. 225.

11.7 ONDE E URTI IN MID

Abbiamo già parlato di un nuovo tipo di onda che si riscontra in MID, l'onda di Alfvén; studiando adesso i moti generali delle onde piane, vedremo che la suddetta è soltanto uno dei diversi nuovi fenomeni cui assistiamo, a causa delle interazioni elettromagnetiche campo-fluido. Ci limiteremo alle onde piane, l'unico tipo che ammette una descrizione semplice, ma le conclusioni che possiamo raggiungere con questa analisi sono sufficienti a darci una buona immagine delle onde che si propagano in MID.

Assumendo che un'onda si propaghi in direzione x, essa è piana quando nessuna variazione di alcuna variabile si verifica sulle direzioni y o z. Le vere onde piane non esistono in natura: ma per piccole regioni almeno dello spazio, le onde possono comportarsi come piane. E, in ogni caso, delle geometrie d'onda più complesse possono essere sempre pensate come una sovrapposizione di onde che si comportano come piane.

Abbiamo due tipi di onde piane: trasversali e longitudinali; quelle trasversali, come le onde di taglio e le TEM (onde elettromagnetiche) hanno solo componenti vettoriali secondo le y e le z (se la propagazione si svolge nel senso delle x). Non sono accompagnate da variazioni in pressione o in densità. Longitudinali sono le onde che hanno componenti delle variabili lungo le x soltanto, oppure degli scalari, a far parte del moto d'onda. Un esempio comune è dato dall'onda acustica, o sonora, che porta con sé una perturbazione in pressione e densità. Troveremo in MID che le onde di taglio trasversali si accoppiano con le grandezze di campo per dare un nuovo tipo d'onda (onda Alfvén), e l'onda acustica ordinaria è divisa in onde magnetoacustiche veloci, lente e intermedie.

Assumeremo nel nostro studio che il fluido sia un continuo, e che sussista la legge di Ohm. Nei gas rarefatti bisogna usare un più complesso modello di fluido e i risultati, specialmente ad alta frequenza, sono differenti. Lo studio delle onde radio nella ionosfera è basato su queste oscillazioni di gas ionizzati rarefatti (plasma), ma non è questa una discussione che possiamo fare qui. Un'altra assunzione da fare, valida per liquidi e gas densi, è che la corrente di spostamento è trascurabile rispetto alla corrente di conduzione: vale a dire, è $\sigma/\omega\epsilon \gg 1$ dove ω è la frequenza angolare ed ϵ la costante dielettrica. Per il mercurio $\sigma \cong 10^6$, $\epsilon \cong 10^{-12}$, in unità RMKS, così che l'assunzione resta del tutto valida per frequenze anche nella regione delle microonde. Anche per gas poco ionizzati a $\sigma \cong 1$, la frequenza dovrebbe arrivare ad un ordine di grandezza di 10^{12} hertz, prima che la corrente di spostamento diventi significativa.

Qui il primo passo sarà di assumere che le onde sono costituite da piccoli disturbi, o perturbazioni, nelle variabili. Inseriamo il disturbo nelle equazioni fondamentali, le linearizziamo ed assumiamo delle soluzioni vettoriali. Si può allora porre un problema di valore caratteristico, e ricavare un'equazione di dispersione. Assumiamo che tutte le perturbazioni si possano esprimere nella forma $e^{j(\omega t - kx)}$ per la propagazione in direzione x. j è la $\sqrt{-1}$.

(a) Onde piane nei gas.

Se trascuriamo la corrente di spostamento e assumiamo che il fluido sia inizialmente a riposo, possiamo ricavare l'adatta equazione di dispersione nel modo che segue. Riferendoci alla fig. 11-6, si assume che il campo magnetico applicato abbia componenti H_{0x} ed H_{0y}, con propagazione in direzione delle x. Non perdiamo generalità lasciando fuori H_{0z}, dato che possiamo sempre ruotare il sistema di coordinate attorno alle x in modo da annullare H_{0z}.

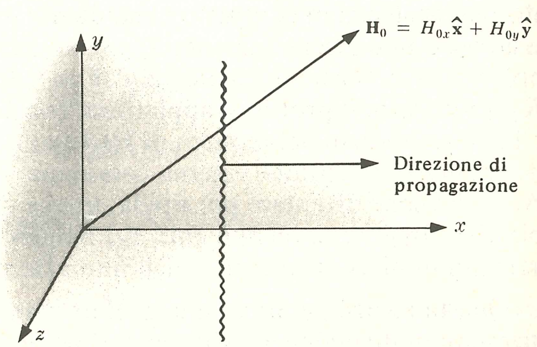


Fig. 11-6. Propagazione di onda piana in presenza di un campo magnetico applicato.

Le equazioni fondamentali sono: tre del moto, tre del trasporto magnetico, una della continuità, una dell'energia, una di stato, per

un totale di nove equazioni. Se le grandezze di perturbazione sono rappresentate da lettere minuscole, e la pressione, densità e temperatura di perturbazione sono indicate da apici:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h} \qquad \rho = \rho_0 + \rho'$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{v}, \ (\mathbf{V}_0 = 0) \qquad T = T_0 + T'$$

$$p = p_0 + p'$$

Le componenti di $\mathbf{v}$ sono u, v, w.

L'equazione di continuità è $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0$$

che diventa $$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 + \rho') + \nabla \cdot [(\rho_0 + \rho')\mathbf{v}] = 0$$

L'equazione linearizzata del primo ordine è

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Allora la forma algebrica (assumendo una soluzione vettoriale in fase $\rho' = \rho'^* e^{j(\omega t - kx)}$ e $u = u^* e^{j(\omega t - kx)}$, con ρ'^* e u^* fasori) è

$$u^* \rho k - \rho'^* \omega - u^* \rho_0 k = 0 \tag{11.41}$$

Similmente possiamo scrivere queste forme algebriche per le altre otto equazioni linearizzate. Le equazioni del primo ordine diventano:

Stato:
$$\frac{p'}{p_0} = \frac{T'}{T_0} + \frac{\rho'}{\rho_0} \tag{11.42}$$

Moto:

$$(a) \qquad \rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial x} + (\zeta + \tfrac{4}{3}\nu\rho_0)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu H_{0y}\frac{\partial h_y}{\partial x}$$

$$(b) \qquad \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = \nu\rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \mu H_{0x}\frac{\partial h_y}{\partial x} \tag{11.43}$$

$$(c) \qquad \rho_0 \frac{\partial w}{\partial t} = \nu\rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu H_{0x}\frac{\partial h_z}{\partial x}$$

Energia (la dissipazione è del secondo ordine):

$$\rho_0 c_p \frac{\partial T'}{\partial t} = \frac{\partial p'}{\partial t} + \kappa_T \nabla^2 T' \tag{11.44}$$

Trasporto magnetico:

$$(a) \qquad \frac{\partial h_x}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 h_x}{\partial x^2}$$

$$(b) \qquad \frac{\partial h_y}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 h_y}{\partial x^2} + H_{0x}\frac{\partial v}{\partial x} - H_{0y}\frac{\partial u}{\partial x} \tag{11.45}$$

$$(c) \qquad \frac{\partial h_z}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 h_z}{\partial x^2} + H_{0x}\frac{\partial w}{\partial x}$$

Ora possiamo ricavare le forme algebriche; risultano nove equazioni algebriche per nove fasori: equazioni non linearmente indipendenti, e il determinante dei coefficienti dei fasori dev'essere uguale a zero. Questa è allora l'equazione di dispersione; in forma di determinante:

	h_x^*	h_z^*	w^*	u^*	v^*	h_y^*	p'^*	ρ'^*	T'^*		
(12.45a)											
(12.43c)		2×2									
(12.45c)											
(12.41)											
(12.43a)										$= 0$	(11.46)
(12.43b)						6×6					
(12.45b)											
(12.42)											
(12.44)											

Abbiamo tre termini non accoppiati; il primo non è importante: indica semplicemente che $h_x = 0$. Il determinante di ordine 2×2 rappresenta due onde trasversali, il 6×6 rappresenta un insieme di onde accoppiate longitudinali e trasversali. Non approfondiremo la sostanza di queste onde generali, ma considereremo dei casi particolari.

(*b*) **Onde trasversali.**

Il determinante di ordine 2×2 si può scrivere così:

$$\nu\eta k^4 + [A_x^2 + j(\nu+\eta)\omega]k^2 - \omega^2 = 0 \qquad (11.47)$$

che rappresenta due modi trasversali, essendo una forma quadratica in k^2: due modi dovuti ad un accoppiamento tra diffusione viscoso-magnetica e l'onda di Alfvén. (Un segno + o − indica una onda diretta in avanti o all'indietro.) A_x è la componente secondo le x della velocità di Alfvén, $\sqrt{B_{0x}H_{0x}/\rho_0}$. Se $A_x = 0$, abbiamo due onde non accoppiate date da:

$$(\eta k^2 + j\omega)(\nu k^2 + j\omega) = 0 \qquad (11.48)$$

che rappresentano diffusione viscosa pura e diffusione magnetica pura (essendo k^2 immaginario).

Se $\nu = \eta = 0$ (senza dissipazione), otteniamo $A_x^2k^2 - \omega^2 = 0$ così che la velocità in fase $v_p = \omega/(\mathrm{Re}\, k)$ è la velocità Alfvén, cioè $v_p = \pm A_x$. Allora k è reale, e non c'è attenuazione.

Le onde trasversali sono identiche per gas o liquidi.

(*c*) **Onde longitudinali accoppiate.**

Il determinante 6×6 della (*11.46*), sviluppato, ci dà

$$\left[\kappa_T\left\{\frac{1}{\rho_0} + j\frac{\omega}{\rho_0 p_0}\left(\tfrac{4}{3}\nu\rho_0 + \zeta\right)\right\}k^4 - \left\{\frac{\omega^2\kappa_T}{p_0} - j\omega c_p + \frac{\omega^2 c_p}{a_0^2\rho_0}\left(\tfrac{4}{3}\nu\rho_0+\zeta\right)\right\}k^2 - j\frac{\omega^3 c_p}{a_0^2}\right]$$
$$\cdot\,[\nu\eta k^4 + \{A_x^2 + j(\nu+\eta)\omega\}k^2 - \omega^2] - k^2A_y^2(j\omega + \nu k^2)\left(\frac{\omega^2 c_p}{a_0^2} - \frac{j\omega\kappa_T k^2}{p_0}\right) = 0 \qquad (11.49)$$

con $A_x = \sqrt{B_{0x}H_{0x}/\rho_0}$, $A_y = \sqrt{B_{0y}H_{0y}/\rho_0}$, ed a_0 = velocità del suono, $\sqrt{kRT_0}$.

Non discuteremo qui il caso generale, ma alcuni casi particolari di notevole interesse.

Se poniamo il campo $\mathbf{H}_0 = 0$ $(A_x = A_y = 0)$ abbiamo delle onde acustiche ordinarie in un fluido viscoso, conduttore del calore. Se poniamo inoltre $\nu = \zeta = \kappa_T = 0$ otteniamo delle semplici onde acustiche ordinarie, e la (*11.49*) si riduce a

$$a_0^2k^2 - \omega^2 = 0$$

così che $v_p = \pm a_0$, velocità del suono ordinaria.

Se $\nu = \eta = \kappa_T = \zeta = 0$, non c'è dissipazione, e abbiamo delle onde magnetoacustiche "ideali" che si possono esaminare in dettaglio e sono di estrema importanza in MID. Notiamo che la (*11.49*) si riduce a due termini, uno identico all'onda Alfvén del paragrafo precedente, l'altro quadratico in k^2:

$$[(a_0^2k^2 - \omega^2)(A_x^2k^2 - \omega^2) - k^2A_y^2\omega^2](A_x^2k^2 - \omega^2) = 0 \qquad (11.50)$$

Le due radici dell'espressione quadratica rappresentano due onde longitudinali (onde magnetoacustiche), una veloce ed una lenta. Le velocità in fase sono:

Longitudinale:

$$v_{p\,\mathrm{veloce}} = \pm\left[\tfrac{1}{2}(A_x^2 + A_y^2 + a_0^2) + \sqrt{\tfrac{1}{4}(A_x^2 + A_y^2 + a_0^2)^2 - a_0^2A_x^2}\,\right]^{1/2}$$
$$v_{p\,\mathrm{lenta}} = \pm\left[\tfrac{1}{2}(A_x^2 + A_y^2 + a_0^2) - \sqrt{\tfrac{1}{4}(A_x^2 + A_y^2 + a_0^2)^2 - a_0^2A_x^2}\,\right]^{1/2} \qquad (11.51)$$

Trasversale:

$$v_p = \pm A_x$$

Il carattere di queste onde si può veder meglio fisicamente se esaminiamo un diagramma della velocità di fase in funzione della direzione di propagazione relativa al campo magnetico. In fig. 11-7 abbiamo un diagramma della velocità di fase in forma polare tridimensionale. Vediamo che in genere ci sono le tre onde; per propagazioni ad angolo retto rispetto $\mathbf{H}_0$ ($H_{0x} = 0$, allora) c'è soltanto un'onda, un'onda acustica modificata.

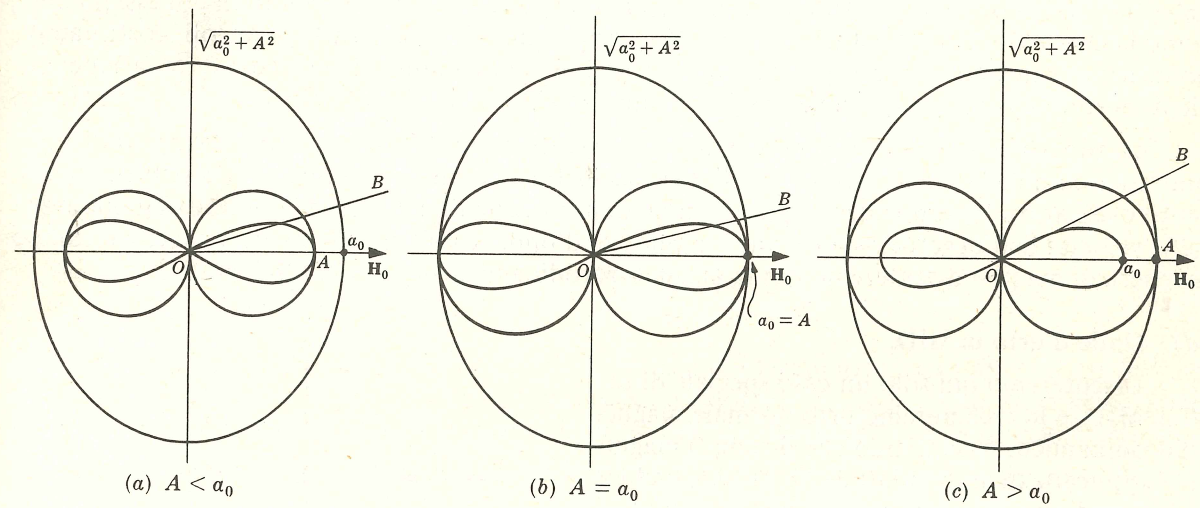
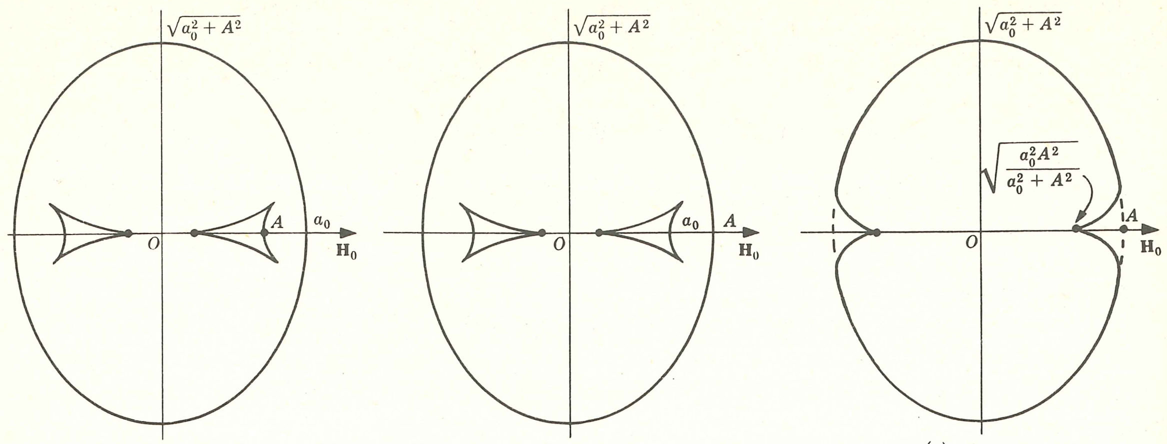


Fig. 11-7. Velocità in fase di onde magnetoacustiche ideali. Il raggio vettore OB rappresenta la velocità in fase per la propagazione di onda piana in quella direzione, relativa al campo magnetico applicato $\mathbf{H}_0$. Si immagini il diagramma ruotato attorno $\mathbf{H}_0$, in modo da costruire delle superfici tridimensionali. $A^2 = A_x^2 + A_y^2$.

Da un punto di vista pratico, A è di solito molto più piccolo di a_0 nei metalli liquidi: il suo effetto sul comportamento acustico è difficile da misurare in laboratorio. Non è questo invece il caso in scala astronomica e planetaria, e queste onde diventano importanti.

Un altro tipo di diagramma interessante è quello radio-normale per le onde magneto-acustiche ideali (Friedrichs) che si vede in fig. 11-8. Questi diagrammi sono l'inviluppo delle onde piane che viaggiano dall'origine verso l'esterno, e rappresentano quindi lo sviluppo spaziale nell'unità di tempo di un impulso realizzato all'origine. Nell'acustica ordinaria un simile diagramma sarebbe una sfera, di raggio a_0 (il cono di Mach è lo sviluppo di un impulso sonoro, emesso da una sorgente



(a) $A < a_0$ (b) $A > a_0$ (c) $A = a_0$

Fig. 11-8. Diagrammi radio-normali, o di Friedrichs, per onde magnetoacustiche ideali. Un impulso sonoro all'origine si sviluppa nell'unità di tempo in queste superfici. Esse vanno ruotate attorno $\mathbf{H}_0$ per renderle tridimensionali.

che si muove a velocità supersonica). Sono diagrammi che si possono ricavare geometricamente dalla fig. 11-7: conduciamo delle perpendicolari ai raggi (come OB) nel punto in cui essi incontrano la curva luogo delle velocità in fase. Man mano che OB spazza tutti gli angoli, costruiamo un insieme continuo di questi piani perpendicolari, il cui inviluppo viene a costituire la superficie di perturbazione sonora, generata da un impulso all'origine.

La superficie di disturbo generata da una sorgente in moto (un aereo, per esempio) diventa piuttosto complicata, ed esistono più di due casi distinti (come il subsonico e il supersonico nel moto ordinario). Vi sono adesso quattro zone di moto, che dipendono dall'ordine di grandezza della velocità dell'oggetto rispetto alle tre velocità d'onda, e dall'orientamento rispetto al campo magnetico; ma non discuteremo qui la magnetoaerodinamica: si veda in bibliografia.

(*d*) Onde d'urto in MID.

Discuteremo qui solo un caso speciale di urto in MID, e lo chiameremo urto normale magnetoidrodinamico. Assumiamo che il campo magnetico applicato su ambo i lati dell'urto sia parallelo al fronte d'urto; assumiamo anche che la conducibilità del fluido sia infinita. La velocità *può essere obliqua* rispetto al fronte d'urto, in modo che ci si debba solo occupare delle componenti della velocità, normali al fronte stesso. In MID l'urto normale è una generalizzazione dell'urto obliquo ordinario. Non discuteremo qui il caso più generale di un campo magnetico arbitrario.

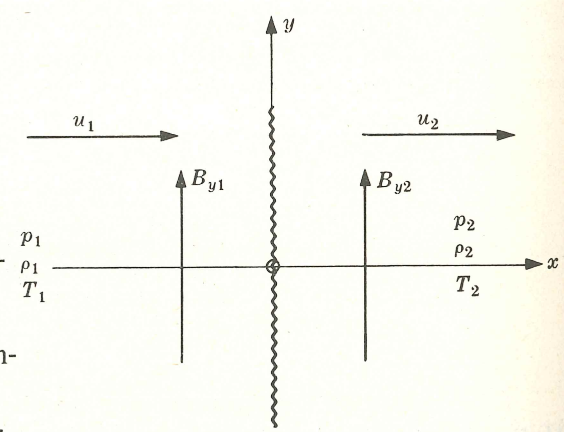


Fig. 11-9. Urto normale in MID. Orientiamo il sistema di riferimento in modo che $B_{z1} = 0$, senza perdere generalità. B_{z2} deve anche essere zero, per soddisfare il trasporto magnetico.

Condurremo l'analisi nel sistema di riferimento dell'urto stesso, assumendo che B resti lo stesso in qualsiasi riferimento. Possiamo scrivere, riferendoci alla fig. 11-9, le seguenti equazioni di conservazione attraverso l'urto.

Continuità: $$[\rho u]_1^2 = 0$$

Quantità di moto: $$\left[\rho u^2 + p + \frac{1}{2\mu} B_y^2\right]_1^2 = 0$$

Trasporto magnetico: $$[uB_y]_1^2 = 0, \qquad B_{z1} = B_{z2} = 0$$

Inoltre v e w, componenti della velocità secondo le y e le z, debbono essere continue.

Energia: $$\left[\frac{p}{\rho}\left(\frac{k}{k-1}\right) + \frac{u^2}{2} + \frac{B_y^2}{\rho\mu}\right]_1^2 = 0$$

Il simbolo $[\ \]_1^2$ si usa per rappresentare la condizione di salto, cioè $[A]_1^2 = A_2 - A_1$, dove A è una quantità qualsiasi. Le quattro equazioni precedenti permettono una completa descrizione dell'urto, e sono analoghe alle equazioni di Rankine-Hugoniot.

Nell'urto esiste una corrente, per effettuare la variazione in B_y.

Risolvendo troviamo la velocità d'urto a_s in aria immobile (la u_1 di fig. 11-9):

$$a_s = \frac{2}{k+1} \cdot \frac{a_1^2 + A_1^2[1 + (1 - k/2)(\rho_2/\rho_1 - 1)]}{\rho_1/\rho_2 - (k-1)/(k+1)} \tag{11.52}$$

in cui a_1 è la velocità del suono a monte e A_1 la velocità di Alfvén $\sqrt{B_{y1}^2/\mu\rho_1}$, sempre a monte. Al tendere di A_1 a zero troviamo la velocità d'urto della gasdinamica ordinaria: velocità d'urto che viene aumentata dalla presenza del campo magnetico. Al diminuire dell'intensità, $\rho_2/\rho_1 \to 1$, $a_s^2 = a_1^2 + A_1^2$, il che ci dà la velocità magnetosonica in un campo perpendicolare.

Il salto di pressione $[p]_1^2 = p_2 - p_1$ ci è dato dalla

$$p_2 - p_1 = a_s^2 \rho_1 (1 - \rho_1/\rho_2) + \frac{B_{y1}^2}{2\mu}(1 - \rho_2^2/\rho_1^2) \tag{11.53}$$

e un numero di Mach magnetosonico $M_t^2 = a_s^2/(a_1^2 + A_1^2)$ si può esprimere come

$$M_t^2 = \frac{2}{k+1} \cdot \frac{1 + [A_1^2/(a_1^2 + A_1^2)](1 - k/2)(\rho_2/\rho_1 - 1)}{\rho_1/\rho_2 - (k-1)/(k+1)} \tag{11.54}$$

Al tendere di $\rho_2/\rho_1 \to 1$, $M_{t1} \to 1$. Per $M_{t1} < 1$, non si può avere urto; per $M_{t1} > 1$ e $a_s^2 > a_1^2$ esso può sussistere. Per $a_s^2 < a_1^2$ invece, qualsiasi sia il valore di A_1, non si può avere urto. Allora quando l'intensità del campo aumenta al di là di un valore critico, non può verificarsi urto.

Per un campo magnetico obliquo generico la situazione è più complicata: si può verificare una molteplicità di urti e discontinuità.

11.8 MOTO COMPRESSIBILE – MOTO NEI CANALI IN MAGNETOGASDINAMICA

In questo paragrafo discuteremo un moto in canale, compressibile, quasi monodimensionale, vitale per lo studio dei generatori in MID e dei sistemi di propulsione. Come si vede in fig. 11-10 assumeremo che il condotto presenti una sezione variabile in direzione x, e che gli elettrodi, conduttori perfetti paralleli, costituiscano due pareti opposte del condotto suddetto. Le altre pareti sono isolanti. Le componenti di velocità v e w si assumono $\ll u$; si trascurano gli effetti del campo indotto.

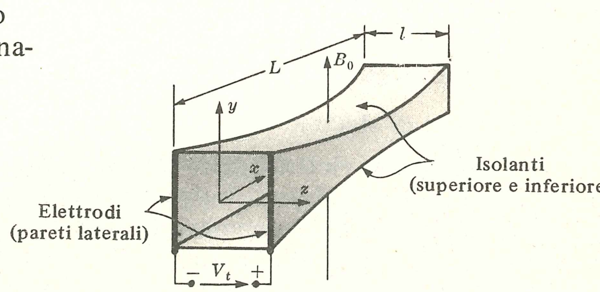


Fig. 11-10. Condotto monodimensionale e moto compressibile.

Il potenziale terminale V_t è collegato al campo elettrico E_z (E_x, E_y sono nulle) dalla

$$E_z = -V_t/l$$

così che E_z risulta costante in tutto il condotto; $J_z = \sigma(E_z + uB_0)$ è funzione della sola x, essendo anche u una funzione di x. Se l variasse proporzionalmente a x, E_z sarebbe funzione di x; qui limiteremo però la nostra discussione ad elettrodi paralleli.

In condizioni di circuito aperto la corrente esterna complessiva I è zero, ma $\mathcal{I}(x)$, densità di corrente per unità di lunghezza, non è necessariamente zero e delle correnti possono circolare nel condotto. Non possiamo trovare $V_{t_{oc}}$ se non conosciamo la funzione $u(x)$. Comunque in una scala locale, per un dato valore di x, le condizioni di circuito aperto ($J_z = 0$) sono date dalla $E_z = -uB_0$. In corto circuito locale, $E_z = 0$. Una parte assegnata qualsiasi del condotto opera dunque come generatore se $-uB_0 < E_z < 0$. In un canale completo questa condizione dev'essere soddisfatta per qualsiasi valore di x. Se poi consideriamo il segno di E_z possiamo dimostrare che quest'ultima deve anche essere negativa quando il condotto deve funzionare da pompa o da contatore. Qui ci limiteremo appunto ai valori negativi di E_z.

(*a*) **Moto di base monodimensionale**

Le equazioni fondamentali del moto nel canale si possono ottenere prendendo la media delle equazioni differenziali corrispondenti attraverso il canale stesso. Accettiamo le ipotesi di moto permanente, σ scalare costante, gas perfetto, nessuna variazione attraverso il condotto, moto adiabatico.

Continuità: $$\rho u A = m \text{ (costante)} \qquad (11.55)$$

Moto: $$\rho u \frac{du}{dx} = -\frac{dp}{dx} - \sigma(E_z + uB_0)B_0 \qquad (11.56)$$

Energia: $$\rho u \left[c_p \frac{dT}{dx} + u \frac{du}{dx} \right] = \sigma(E_z + uB_0)E_z \qquad (11.57)$$

Stato: $$p = \rho RT \qquad (11.58)$$

Qui A è la sezione trasversale del condotto.

Sono equazioni che non si possono risolvere esplicitamente per una generica variazione di area $A(x)$: si può però ottenere un utile integrale principale; combinando opportunamente le suddette equazioni abbiamo

$$\frac{du}{dx} = \frac{(u/A)(dA/dx) - (\sigma B_0^2/p)(u-u_3)(u-u_1)}{M^2-1} \qquad (11.59)$$

$$\frac{dM}{dx} = \frac{1}{(M^2-1)} \left\{ \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right) \frac{M}{A} \frac{dA}{dx} - \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right) \frac{\sigma B_0^2}{ap} (u-u_3)(u-u_2) \right\} \qquad (11.60)$$

in cui le velocità critiche u_1, u_2 e u_3 sono definite dalle

$$u_1 = -\frac{k-1}{k} \cdot \frac{E_z}{B_0} = \frac{k-1}{k} u_3, \qquad u_2 = \frac{1 + kM^2}{2 + (k-1)M^2} u_1, \qquad u_3 = -\frac{E_z}{B_0} = \frac{V_t}{B_0 l} \qquad (11.61)$$

ed M è il numero di Mach locale.

Ora l'interazione elettromagnetica con il fluido non ci dà semplicemente la forza $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$: nel bilancio entra anche il calore sviluppato per effetto Joule. E' dalle (*11.59*) e (*11.60*) allora che si può determinare l'effetto complessivo. Per $u < u_3$ la forza di massa, da sola, accelera il moto; per $u > u_3$ la forza di massa, da sola, lo decelera. La velocità u_1 è quella in corrispondenza alla quale la forza di massa e il calore per effetto Joule si cancellano l'un l'altra. Il risultato è allora: se $M > 1$ il moto è accelerato quando u è compreso tra u_3 e u_1, decelerato se u si trova fuori di questo campo di definizione. Se $M < 1$, il fluido si comporta in modo inverso. La (*11.60*) ci fa vedere l'effetto complessivo su M. Se $M > 1$, M aumenta proporzionalmente a x quando u si trova tra u_2 e u_3, diminuisce proporzionalmente a x quando è al di fuori. Per $M < 1$, vale l'inverso.

Per funzionamento con $E_z < 0$ e per vari valori di u_0 (velocità d'ingresso in $x = 0$), possiamo tracciare qualitativamente il comportamento di u e di M lungo il condotto: vedi figg. 11-11 e 11-12. Nel funzionamento da generatore si ha $u > u_3$, e dalle figure vediamo che solo nei casi $1A$ e $2A$ abbiamo $u > u_3$. In $2A$, è $u > u_3$ dappertutto; in $1A$ il condotto può funzionare come generatore solo per una parte della sua lunghezza (caso $1Ab$). Dobbiamo comunque ricordare che la condizione locale per avere un comportamento da generatore è che sia $u > u_3$, e il comportamento complessivo del canale ($V_{t_{oc}}$, I_{sc} ed R_i) si può valutare solo dopo che si è conosciuta la $u(x)$.

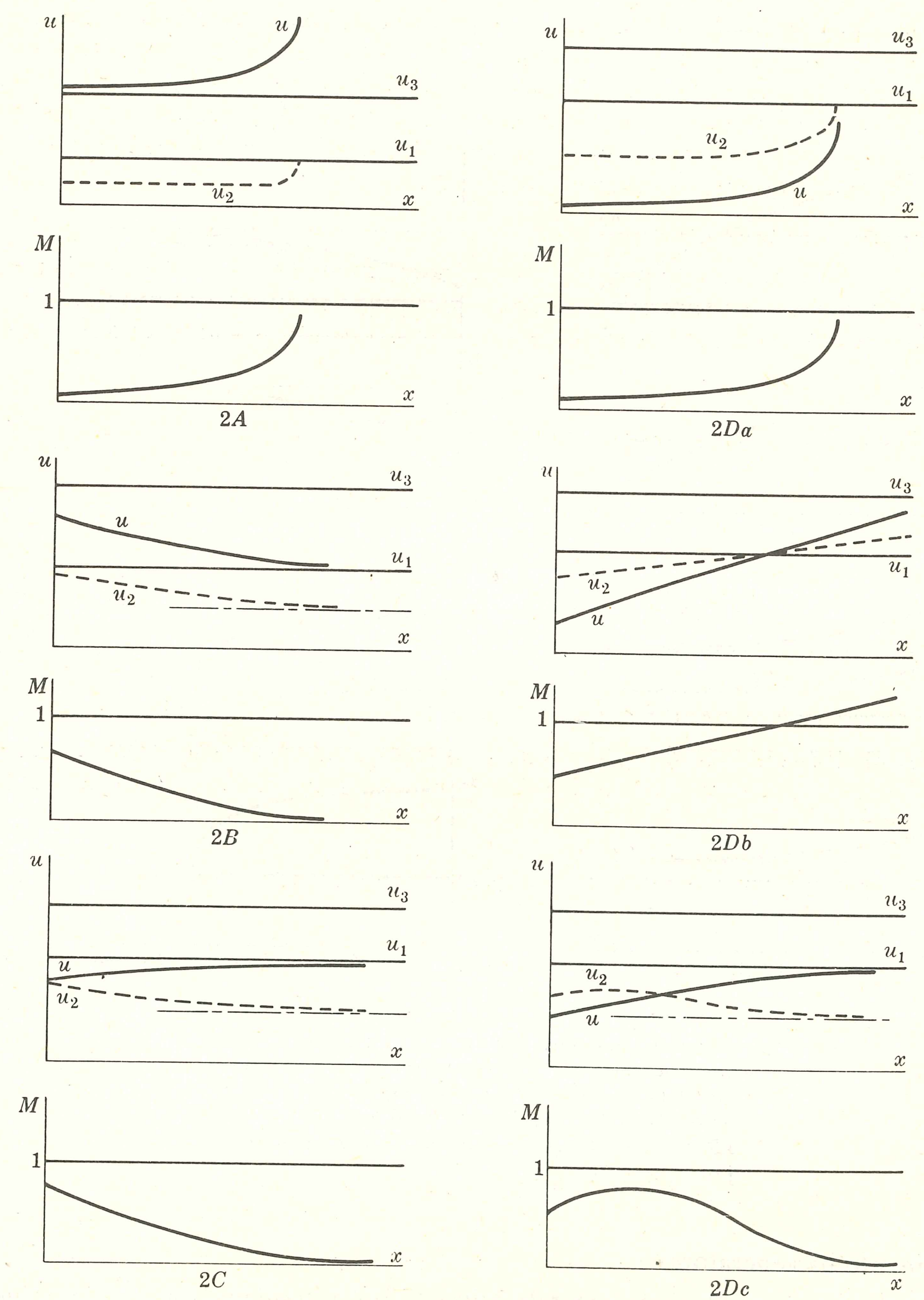


Fig. 11-11. Comportamento qualitativo di u ed M lungo un condotto a sezione trasversale costante, per varie condizioni iniziali subsoniche.
$2A$: $u_2 < u_1 < u_3 < u_0$. $2B$: $u_2 < u_1 < u_0 < u_3$. $2C$: $u_2 < u_0 < u_1 < u_3$. $2Da, 2Db, 2Dc$: $u_0 < u_2 < u_1 < u_3$.

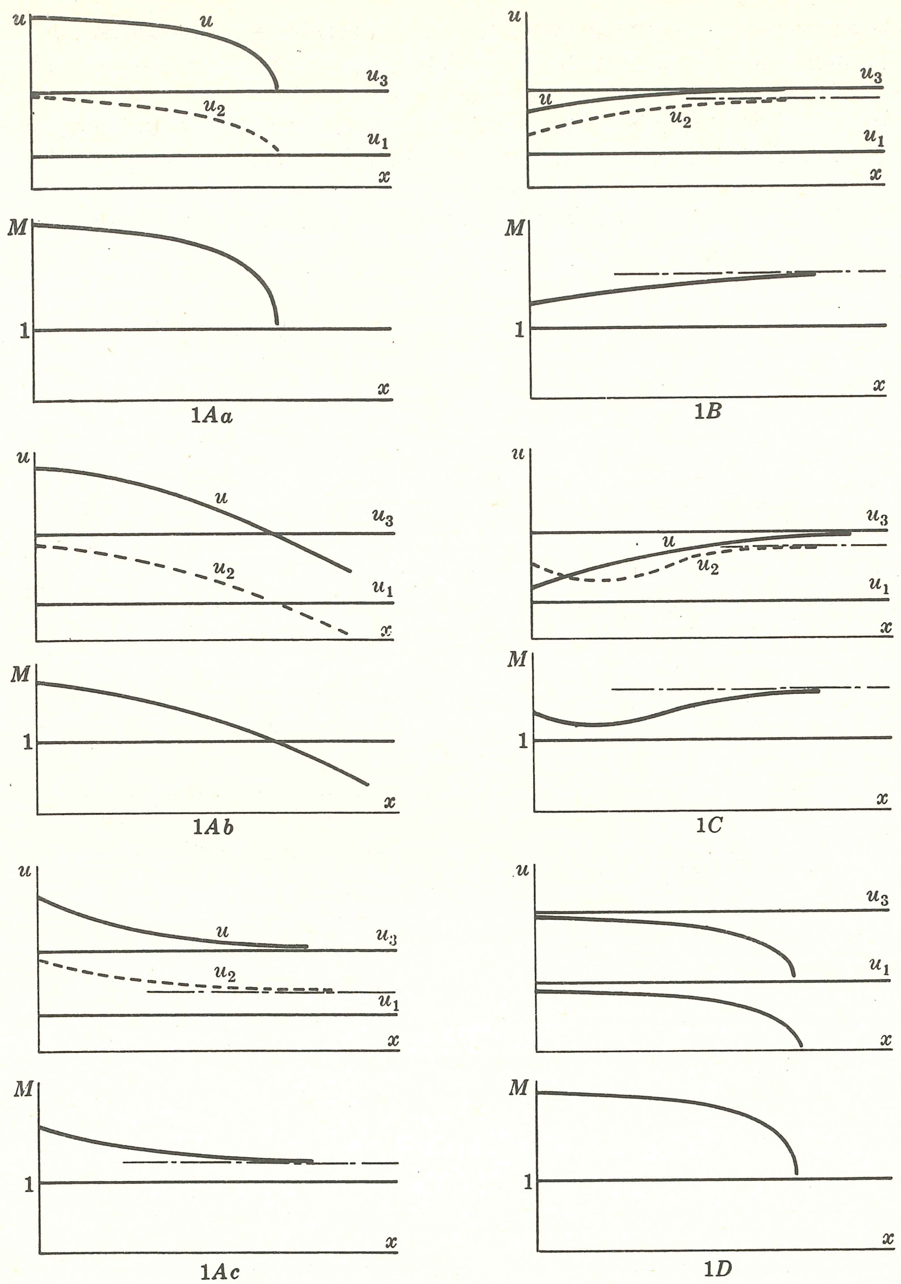


Fig. 11-12. Comportamento qualitativo di u ed M lungo un condotto a sezione trasversale costante, per varie condizioni iniziali supersoniche. $1Aa$, $1Ab$, $1Ac$ sono le tre possibilità che si offrono quando $u_1 < u_2 < u_3 < u_0$.
$1B$: $u_1 < u_2 < u_0 < u_3$. $1C$: $u_1 < u_0 < u_2 < u_3$.
$1D$: $u_0 < u_1 < u_2 < u_3$.

(*b*) **Funzionamento da generatore.**

Non discuteremo qui la soluzione generale delle equazioni fondamentali, ma esamineremo un problema semplice e pratico: il generatore a velocità costante. $A(x)$ deve variare in un modo particolare, se deve dar luogo ad una $u(x)$ costante.

Imponendo una velocità costante u_0 nelle equazioni fondamentali possiamo ricavare le seguenti relazioni:

$$p_0 - p = xB_0^2\sigma(u_0 - u_3), \qquad T/T_0 = (p/p_0)^{(k-1)u_3/ku_0}, \qquad A/A_0 = (p_0/p)^{1-(k-1)u_3/ku_0} \qquad (11.62)$$

La corrente totale I è allora

$$I = \int_0^L \sigma(-V_t + u_0B_0)\frac{A}{l}\,dx \qquad (11.63)$$

così che per una V_t (o u_3) assegnata lo sviluppo complessivo P di potenza è IV_t, che dopo integrazione diventa

$$P = \frac{A_0p_0ku_0}{(k-1)}\left[1 - \left\{1 - \frac{B_0\sigma}{p_0}(u_0 - u_3)L\right\}^{(k-1)u_3/ku_0}\right] \qquad (11.64)$$

La (*11.62*) si può ottimizzare direttamente rispetto a u_3 (per un u_0 prefissato).

Non approfondiamo la materia perché l'integrazione delle equazioni di moto in condizioni arbitrarie diventa piuttosto complessa.

Da un punto di vista pratico l'analisi del generatore in MID è in un certo modo più complessa; la conducibilità è un tensore (che dà luogo a correnti di Hall) e varia con la temperatura. Abbiamo comunque esposto i principi del condotto monodimensionale; e questi principi restano uguali anche in sistemi più complicati.

BIBLIOGRAFIA

1. Cowling T. G., *Magnetohydrodynamics*, Interscience, 1957.
2. Hughes W. F., Young F. J., *The Electromagnetodynamics of Fluids*, John Wiley, New York, 1966.
3. Jeffrey A., *Magnetohydrodynamics*, Interscience (John Wiley), Oliver and Boyd, 1966.
4. Kulikovskij, A. G., Lyubimov, G.A., *Magnetohydrodynamics* (tradotto dal russo), Addison-Wesley, 1965.
5. Landau L. D., Lifschitz, E. M., *Electrodynamics of Continuous Media*, Addison-Wesley, 1960.
6. Shercliff A., *A Textbook of Magnetohydrodynamics*, Pergamon Press, 1965.
7. Sutton G. W., Sherman, A., *Engineering Magnetohydrodynamics*, McGraw-Hill, 1965.
8. Castagna A., *Appunti di Fluidodinamica*, Università di Roma, 1968.

PROBLEMI RISOLTI

11.1. In fig. 11-13 è riportato il disco di un generatore di Faraday. Consideriamo un sottile disco conduttore che ruota con velocità angolare uniforme ω, in presenza di un campo magnetico permanente ed uniforme $\mathbf{B}_0$ in direzione assiale. L'asse (di raggio a), perfettamente conduttore, è collegato alla periferia del disco tramite contatti striscianti; il circuito è chiuso su un voltmetro. Che tensione di circuito aperto indicherà quest'ultimo?

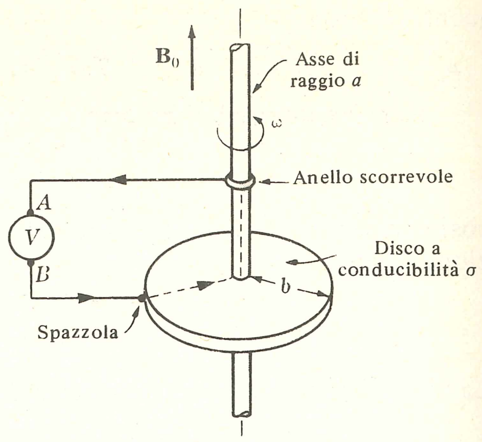


Fig. 11-13

Essendo permanente il moto, non si hanno correnti parassite; la forza elettromotrice è pari alla d.d.p. ai terminali. Dunque

$$V_{AB} = -\int_a^b E_r \cdot dr$$

e nel circuito aperto; $J_r = 0 = \sigma(E_r + r\omega B_0)$. Quindi

$$V_{AB} = \int_a^b r\omega B_0\, dr = \tfrac{1}{2}(b^2 - a^2)\omega B_0$$

Alternativamente potremmo dire

$$\text{emf} = V_{BA} = \oint \mathbf{V}\times\mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} - \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{A}$$

e percorrendo un cammino che passa per i contatti fissi: disco e asse, ricaviamo solo un contributo $\mathbf{V}\times\mathbf{B}$ nel disco. Allora

$$V_{AB} = -V_{BA} = \int_a^b (r\omega)B_0\, dr = \tfrac{1}{2}(b^2 - a^2)\omega B_0$$

che è d'accordo con il risultato già ottenuto.

11.2. Quali sono le condizioni al contorno per il campo magnetico indotto sulle pareti di un canale?

Consideriamo il moto a regime, in un condotto rettangolare a sezione trasversale costante. In fig. 11-14 vediamo la regione del moto, presso una parete. Se quest'ultima è un perfetto conduttore, $\sigma = \infty$, e il campo elettrico tangenziale E_y è uguale a zero; alla parete è nulla anche la velocità del fluido. Quindi $J_y = \sigma(E_y + \mathbf{V}\times\mathbf{B}) = 0$ alla parete. Ma dalla $\nabla\times\mathbf{H} = \mathbf{J}$, abbiamo $\partial H_x/\partial z = 0$ in cui z è la coordinata normale alla parete e il moto si svolge in direzione x. Per una parete isolante, corrisponde ad essa $J_z = 0$ e finiamo col trovare $\partial H_x/\partial y = 0$. Concludiamo che per una parete perfettamente conduttrice:

$$\partial H_x/\partial n = 0$$

mentre per una parete isolante

$$\partial H_x/\partial t = 0$$

in cui t ed n sono le direzioni tangenziale e normale alla parete, entrambe normali alla direzione del moto x.

In una parete a conducibilità finita si possono ricavare delle relazioni più complesse, che il lettore potrà trovare nel rif. 2 di pag. 225.

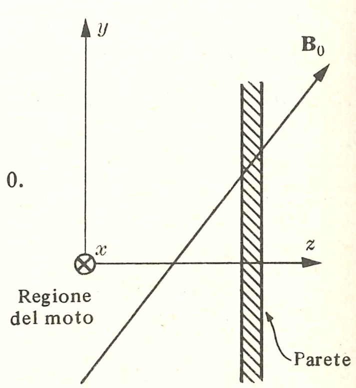


Fig. 11-14

11.3. Calcolare le caratteristiche terminali del generatore di vortici in regime compressibile che si vede in fig. 11-15.

m è la portata, v_b la velocità tangenziale all'ingresso. B_0 è permanente, uniforme, ed è applicato lungo le z. Si usano elettrodi a schermo cilindrico. Per ipotesi è $v \gg u$ (v è la componente della velocità secondo θ, u la componente radiale); secondo z non ci sono variazioni; $R_m \ll 1$ (campo indotto trascurabile). L'equazione del moto secondo θ è allora

$$\rho u(\partial v/\partial r + v/r) = -J_r B_0$$
$$= -\sigma(E_r + vB_0)B_0$$

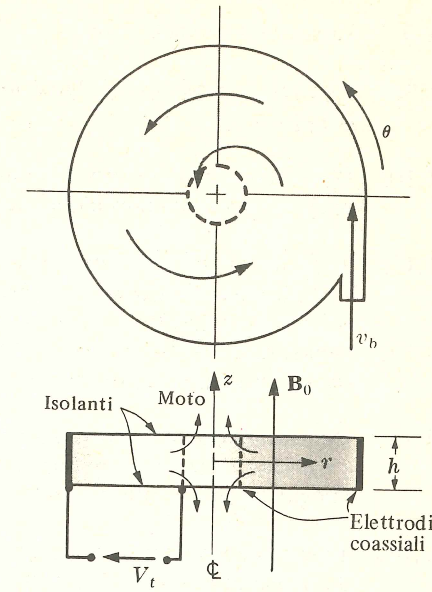


Fig. 11-15

Quindi dalla $\nabla\cdot\mathbf{J} = 0$, $J_r = I/2\pi rh$ e $m = 2\pi u\rho rh$ e dalla equazione precedente ricaviamo

$$\frac{m}{2\pi rh}\left(\frac{dv}{dr} + \frac{v}{r}\right) = -\frac{IB_0}{2\pi rh}$$

che si può integrare per darci

$$\frac{v}{v_b} = \frac{b}{r} + \frac{IB_0 r}{2mv_b}\left(\frac{b^2}{r^2} - 1\right)$$

Troviamo V_t con la

$$V_t = -\int_a^b E_r\, dr$$

in cui E_r si trova in funzione di I con la

$$I = J_r \cdot 2\pi rh = \sigma(E_r + vB_0)\, 2\pi rh$$

Dopo aver integrato, e posto $I = 0$, troviamo

$$V_{t_{oc}} = v_b b B_0 \ln(b/a)$$

e ponendo $V_t = 0$,

$$I_{sc} = 2\pi h\sigma v_b b B_0\left[1 - \frac{N}{2}\left(1 - \frac{b^2/a^2 - 1}{2(b/a)^2\ln(b/a)}\right)\right]^{-1}$$

in cui N è il parametro di interazione e vale

$$N = 2\pi\sigma B_0^2 b^2 h/m$$

m è un numero negativo perché il moto è diretto verso l'interno (u negativa) ed r è positivo verso l'esterno.

PROBLEMI SUPPLEMENTARI

11.4. Per quali condizioni la forza di massa $\mathbf{J}\times\mathbf{B}$ è irrotazionale?

11.5. Se $\mathbf{J}\times\mathbf{B}$ è irrotazionale, cosa si può dire sull'andamento della corrente? Dimostrare che nel moto incompressibile bidimensionale, quando $\mathbf{J}\times\mathbf{B}$ è irrotazionale la distribuzione della velocità è esattamente la stessa che nel caso di moto potenziale.

11.6. Quali sono nel precedente problema le restrizioni su $\mathbf{B}_0$ per un moto potenziale? Qual è l'orientamento di $\mathbf{B}_0$?

11.7. Discutere nel problema di Hartmann il segno di E_z e di I. In condizioni di circuito aperto $V_{t_{oc}}$ è un numero positivo o negativo?

11.8. Dimostrare che nel problema di Hartmann $\partial p/\partial x$ è una costante in tutto il canale.

11.9. Risolvere il problema di Hartmann rispetto alla variazione di pressione attraverso il canale (($\partial p/\partial y$ è non nulla).

11.10. Dimostrare che in un moto bidimensionale con la velocità che si trova nello stesso piano di $\mathbf{B}_0$, $\nabla^2\phi$ è proporzionale all'unica componente di $\nabla \times \mathbf{V}$, vettore vorticosità. ϕ è il potenziale elettrico.

11.11. Se un missile viaggia nella ionosfera a velocità $\mathbf{V}_0$ in presenza di un campo magnetico, quale sarà all'infinito la condizione al contorno per la $\mathbf{E}$ relativa al missile?

11.12. Dimostrare che se $\epsilon = \epsilon_0$ e $\mu = \mu_0$ per un liquido conduttore, in un qualsiasi sistema di riferimento potremo scrivere le equazioni costitutive nella forma $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}$ e $\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E}$.

11.13. Dimostrare che le equazioni precedenti possono essere scritte in qualsiasi sistema di riferimento solo se ϵ e μ sono rispettivamente uguali a ϵ_0 e μ_0. Comunque, per le approssimazioni della MID, $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ vale in ogni sistema di riferimento.

11.14. Trovare l'equazione di dispersione delle onde trasversali in un fluido che si muove con velocità V_0 nella direzione di propagazione. Il fluido è conduttore, e gli è applicato un campo magnetico.

11.15. Come mai per il problema di Hartmann non c'è bisogno dell'equazione di trasporto magnetico? Si potrebbe con essa elaborare il problema in un modo diverso?

11.16. Se invece delle equazioni di Maxwell e della legge di Ohm usiamo l'equazione di trasporto, come entra nella formula il circuito elettrico esterno? *Traccia.* Dimostrare che le condizioni al contorno del campo indotto dipendono dal circuito elettrico esterno.

11.17. Risolvere in MID il problema di Couette (non è altro che il problema di Hartmann, con la lastra superiore che si muove con velocità V_0 in direzione del moto).

11.18. Supponiamo che le pareti isolanti, in alto e in basso, del problema di Hartmann siano dotate di conducibilità finita. Dimostrare che esse agiscono soltanto come resistenze esterne in parallelo, e non cambiano la soluzione.

11.19. Come cambia nel problema precedente il campo magnetico indotto?

11.20. Può esistere un campo mobile?

11.21. Calcolare I_{sc} ed R_i per il generatore di Faraday del problema 11.1.

11.22. Per quali condizioni avremo $H_x = 0$ alla parete del condotto nel problema 11.2?

11.23. Studiare il generatore di vortici per un campo radiale di forma $B_r = B_0/_r$ (vedi problema 11.3).

11.24. Qual è l'adatta equazione dell'energia per il problema 11.23? Si può integrarla per trovare $T(r)$? E $p(r)$? *Traccia.* Assumere $v^2/2 \gg u^2/2$.

NOMENCLATURA USATA NEL CAPITOLO 11

a = velocità del suono
a_s = velocità d'urto
A = velocità di Alfvén; area
$\mathbf{B}$ = campo d'induzione magnetica
$\mathbf{B}_0$ = campo magnetico applicato
c = velocità della luce
c_p = calore specifico a pressione costante
$\mathbf{D}$ = campo di spostamento

$\mathbf{E}$ = campo elettrico
$\mathbf{H}$ = campo magnetico
$\mathcal{J}$ = corrente per unità di lunghezza del canale
I = corrente totale in un sistema
I_{sc} = corrente di corto circuito
$\mathbf{J}$ = flusso di corrente
k = rapporto tra i calori specifici c_p/c_v; costante di propagazione
L = lunghezza caratteristica
m = portata in massa
$\mathbf{M}$ = vettore magnetizzazione
M = numero di Hartmann
M_m = numero di Mach magnetico
N_R = numero di Reynolds
N = coefficiente di interazione
p = pressione
P = potenza
$\mathbf{P}$ = vettore polarizzazione
P_m = numero di Prandtl magnetico
R_m = numero di Reynolds magnetico
T_{ij} = tensore degli sforzi elettromagnetico
u = componente della velocità secondo le x; energia interna
v = componente della velocità secondo le y
v_p = velocità di fase
$\mathcal{V}$ = volume
$\mathbf{V}$ = vettore velocità
V_t = potenziale sul terminale
$V_{t_{oc}}$ = potenziale sul terminale a circuito aperto
w = componente della velocità secondo le z
β = $1/\sqrt{1 - V^2/c^2}$
ϵ = permittività
ϵ_0 = permittività nello spazio
ζ = secondo coefficiente di viscosità
η = diffusività magnetica
κ = permittività relativa
κ_m = permeabilità magnetica relativa
κ_T = conducibilità termica
μ = permeabilità magnetica
μ_0 = permeabilità magnetica nello spazio
μ_f = viscosità del fluido
ν = viscosità cinematica
ρ = densità del fluido
ρ_e = densità di carica
σ = conducibilità elettrica
τ = tensore degli sforzi meccanico
Φ = funzione dissipazione
ϕ = potenziale elettrico
ψ = potenziale gravitazione
ω = frequenza

CAPITOLO 12

Fluidi non newtoniani

12.1 INTRODUZIONE

Vi sono dei fluidi che non obbediscono alla semplice relazione sforzo-velocità di deformazione fornitaci per un fluido newtoniano dall'equazione *(3.45)* di pagina 41: si tratta dei fluidi generalmente detti non newtoniani. Di questo tipo sono diversi fluidi di uso comune: vernici, soluzioni di polimeri, prodotti alimentari come lo sciroppo di mele e la salsa di pomodoro, emulsioni di acqua in olio o di olio in acqua, sospensioni di solidi vari e di fibre nella pasta di carta liquida, le melme di carbone e il fango da trivella usato nella perforazione dei pozzi. Non è certo per mancanza di applicazioni che in diversi testi e in molti corsi non si dà la dovuta importanza a questi fluidi; anche se le proprietà che presentano non si prestano all'analisi elegante ed accurata che esiste per i newtoniani, il moto dei fluidi non newtoniani possiede comunque alcune interessanti, utili, persino divertenti caratteristiche. Per esempio, nel trattamento per frattura dei pozzi di petrolio, sono stati studiati dei materiali che aggiunti all'acqua generano un fluido tanto spesso da tenere in sospensione sabbia, vetro, particelle metalliche; quello stesso fluido però può essere pompato, con portate enormi, nella tubazione di un pozzo con metà delle perdite per attrito che si hanno con l'acqua. In un caso si possono pompare più di 100 barili (4200 galloni ≃ 16.000 litri) al minuto attraverso migliaia di metri di tubazione da 3 pollici. Questo procedimento per frattura serve ad aumentare la produzione dei pozzi di metano e di petrolio: nella zona ricca viene provocata una soluzione di continuità orizzontale, e il fluido pompato nel pozzo ad alta pressione ne aumenta notevolmente l'apertura; questa poi viene mantenuta dalla sabbia, o dalle particelle che fungono da agenti di supporto. Il fluido poi va spinto con notevoli portate, per evitarne la perdita per diffusione nei pori della roccia fratturata.

Anche le melme di carbone, costituite per più dell'80% in volume da polvere o granulometrie di carbone sospese in acqua, hanno proprietà non newtoniane e possono venir pompate per lunghe distanze, con molto meno potenza di quel che serve per pompare la semplice acqua.

12.2 CARATTERISTICHE E CLASSIFICAZIONE DEI FLUIDI NON NEWTONIANI

(*a*) **In generale.**

Come si è già detto nella parte 3.3(*d*) di pag. 41, lo sforzo di taglio τ in un fluido newtoniano è linearmente proporzionale alla velocità di taglio $\dot{\gamma}$ tramite la viscosità μ:

$$\tau = \mu\dot{\gamma} = \mu\frac{\partial u}{\partial y} \qquad (12.1)$$

(in cui $\dot{\gamma}$ è la velocità di deformazione a taglio);[1] oppure, reciprocamente, la velocità di taglio è linearmente proporzionale allo sforzo di taglio:

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{\mu}\tau \qquad (12.2)$$

[1] Nel capitolo 3 usavamo per la velocità di deformazione a taglio la notazione γ_{ij}, mentre qui abbiamo γ per deformazione di taglio e $\dot{\gamma}$ per la velocità di deformazione, dato che in un fluido non newtoniano si possono considerare tutti e due.

I fluidi non newtoniani che non seguono questa relazione lineare verranno in seguito raggruppati e discussi in tre classificazioni generali:

(1) La più semplice comprende i fluidi indipendenti dal tempo, nei quali la velocità di taglio è una funzione unica, ma non lineare, dello sforzo di taglio.

(2) I fluidi non newtoniani dipendenti dal tempo presentano delle relazioni sforzo-velocità di deformazione più complesse; in essi la velocità di taglio non è una funzione a un sol valore dello sforzo di taglio; la prima dipende dal tempo di taglio, o anche dalla precedente storia della velocità di taglio nel fluido.

(3) Nei fluidi viscoelastici lo sforzo e la velocità di deformazione sono in certo modo collegate allo sforzo di taglio. Diversamente dal fluido viscoso, in cui tutta l'energia di deformazione viene dissipata, parte di detta energia in un fluido viscoelastico si può recuperare, come accade nella deformazione di un solido elastico.

(*b*) **Fluidi indipendenti dal tempo.**

Per i fluidi non newtoniani indipendenti dal tempo,

$$\dot{\gamma} = f(\tau) \qquad (12.3)$$

Un fluido newtoniano è semplicemente un caso particolare di questa classificazione, con una funzione $f(\tau)$ lineare: è cioè un fluido non newtoniano semplicemente viscoso. La maggioranza dei fluidi non newtoniani rientra probabilmente in questa categoria; e anche certi casi che non vi sono compresi, come quelli dei fluidi dipendenti dal tempo, possono rientrarvi per approssimazione in certi esempi semplici come il moto permanente in un condotto o i moti Couette.

Questi fluidi ci si presentano di solito in tre tipi distinti, come si vede in fig. 12-1:

(1) Plastici di Bingham, curva *A*

(2) Fluidi pseudoplastici, curva *B*

(3) Fluidi dilatanti, curva *C*.

I fluidi newtoniani vengono rappresentati da linee rette, come si vede dalla retta *D*.

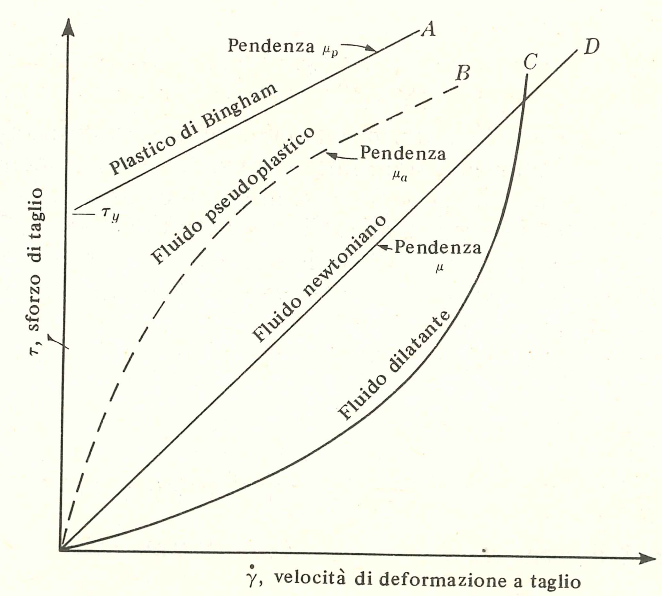


Fig. 12-1. Relazioni tipiche sforzo-velocità di deformazione per fluidi non newtoniani.

1. *Plastici di Bingham.*

I corpi plastici di Bingham presentano un cedimento per velocità di taglio nulla, seguito da una relazione lineare tra sforzo e velocità di taglio; le loro caratteristiche vengono definite da due costanti: il cedimento a taglio τ_y da superare perché cominci lo scorrimento, e la viscosità plastica μ_p, che è la pendenza della parte retta della curva A in fig. 12-1. L'equazione per un plastico di Bingham è allora

$$\tau = \tau_y + \mu_p \dot{\gamma} \qquad (12.4)$$

Il concetto di plastico di Bingham rappresenta molto da vicino il comportamento di molti fluidi reali: melme, plastiche, emulsioni come le vernici, sospensioni di solidi minuti nei liquidi: i fanghi da trivellazione per esempio, costituiti da argilla in acqua.

A causa della sua semplice relazione lineare tra sforzo e velocità di taglio, il concetto di plastico di Bingham risulta conveniente per l'analisi.

2. *Fluidi pseudoplastici.*

I fluidi pseudoplastici (curva B di fig. 12-1) e i fluidi dilatanti (curva C) non presentano cedimenti a taglio; i primi presentano invece una pendenza progressivamente decrescente della curva sforzo di taglio-velocità di deformazione: si tratta della viscosità apparente

$$\mu_a = \tau/\dot{\gamma} \qquad (12.5)$$

Per elevate velocità di deformazione in fluidi reali la viscosità apparente diviene costante e uguale a μ_∞; la relazione sforzo di taglio-velocità di deformazione diventa lineare.

Esiste un bel numero di relazioni empiriche, che sono state usate per descrivere i fluidi pseudoplastici; la più semplice è la legge della potenza di Ostwald

$$\tau = k\dot{\gamma}^n \quad \text{in cui} \quad n < 1 \qquad (12.6)$$

k ed n sono costanti per un certo fluido. k misura la consistenza del fluido; n, l'esponente, è una misura di come il fluido stesso si discosta dal comportamento newtoniano. Notare che per un fluido newtoniano $n = 1$ e $k = \mu$, viscosità.

Definendo la viscosità apparente come

$$\mu_a = \tau/\dot{\gamma} \qquad (12.7)$$

la (12.6) ci dà

$$\mu_a = k\dot{\gamma}^{(n-1)} \qquad (12.8)$$

Noteremo che quando la velocità di deformazione è zero, la viscosità apparente è infinita; è una delle diverse obiezioni che sono state fatte contro l'uso del modello rappresentato dalla legge della potenza; un'altra è che per i fluidi reali n non è costante per l'intero campo di velocità, e un'altra ancora che le dimensioni della costante k dipendono da n. Come si è detto n tende a 1, cioè al moto newtoniano, alle altissime velocità di taglio. Comunque la regola della potenza è utile per la sua semplicità, ed è adatta all'analisi di moti come il Couette e quelli in tubazioni e canali.

Altre equazioni empiriche, che evitano alcune delle obiezioni fatte alla regola della potenza, sono

Prandtl	$\tau = A \sin^{-1}(\dot{\gamma}/C)$	(12.9)
Eyring	$\tau = \dot{\gamma}/B + C \sin(\tau/A)$	(12.10)
Powell-Eyring	$\tau = A\dot{\gamma} + B \sinh^{-1} C\dot{\gamma}$	(12.11)

Williamson	$\tau = A\dot{\gamma}/(B + \dot{\gamma}) + \mu_\infty \dot{\gamma}$	(12.12)

in cui A, B, C rappresentano delle costanti (diverse per ogni modello).

Le ultime quattro equazioni conducono ad una complessità di analisi ben maggiore che nel caso della regola della potenza; dato che quest'ultima va bene in molte applicazioni d'ingegneria, limiteremo ad essa il resto della nostra discussione dei fluidi pseudoplastici. Quando la regola non dà un'adeguata rappresentazione del fluido, conviene sempre affidarsi ad un programma al calcolatore, partendo dalle effettive e misurate proprietà del fluido, piuttosto che ricorrere ad un'altra relazione empirica.

3. *Fluidi dilatanti.*

I fluidi dilatanti sono simili a quelli pseudoplastici per il fatto di non avere cedimento a taglio, e ne differiscono perché la loro viscosità apparente aumenta all'aumentare della velocità di taglio. Sono dei fluidi molto meno comuni degli pseudoplastici, e come questi ultimi possono essere rappresentati con il modello della legge della potenza, essendo però l'esponente n maggiore dell'unità.

I fluidi che seguono la regola della potenza danno degli andamenti che si possono semplicemente rappresentare, usando i logaritmi dello sforzo di taglio e della velocità di deformazione, come in fig. 12-2. Prendendo il logaritmo di ambo i membri dell'equazione (12-6),

$$\log \tau = \log k + n \log \dot{\gamma} \qquad (12.13)$$

equazione di una retta di pendenza n; l'intersezione delle curve con $\log \dot{\gamma} = 0$ o con $\dot{\gamma} = 1$ ci dà il valore di $\log k$, costante di consistenza. Un fluido newtoniano, $n = 1$, è un caso particolare di questi fluidi.

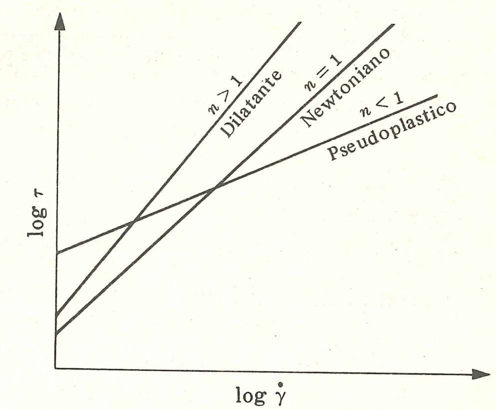


Fig. 12-2. Diagramma logaritmico dei fluidi che seguono la regola della potenza.

(*c*) **Fluidi dipendenti dal tempo.**

Il comportamento di alcuni fluidi è più complesso di quelli che abbiamo appena visti; la viscosità apparente non dipende solo dalla velocità di deformazione, ma anche dal tempo per cui il taglio è stato applicato. Abbiamo due classi generali:

(1) Fluidi tixotropici

(2) Fluidi reopectici.

Lo sforzo diminuisce nel tempo, sotto l'effetto dell'azione di taglio, per un fluido tixotropico; aumenta col tempo per un reopectico. Un esempio comune di fluido tixotropico è l'inchiostro da stampa, che di solito percorre diversi rulli prima di esser passato sulle lastre.

1. *Fluidi tixotropici.*

La consistenza, o viscosità apparente, dei fluidi tixotropici dipende dal tempo di taglio e dalla velocità di taglio. Non appena il fluido, partendo dallo stato di quiete, viene sollecitato, esso perde continuità, si spezza (in iscala molecolare), per poi presentare un fenomeno di ricostruzione strutturale, che aumenta col tempo. Si raggiunge alla fine una situazione di equilibrio, in cui la velocità di frattura è pari a quella di ricostruzione. Se gli si permette di riposare, il fluido si ricostruisce lentamente, e ritorna infine alla consistenza originale. La tixotropia è dunque un processo reversibile.

Vediamo in fig. 12-3 il diagramma sforzo-deformazione di un fluido tixotropico subito dopo l'azione di taglio, e dopo che il fluido è rimasto a riposo per tempi diversi. In figura la curva iniziale appare newtoniana, ma potrebbe anche non esserlo.

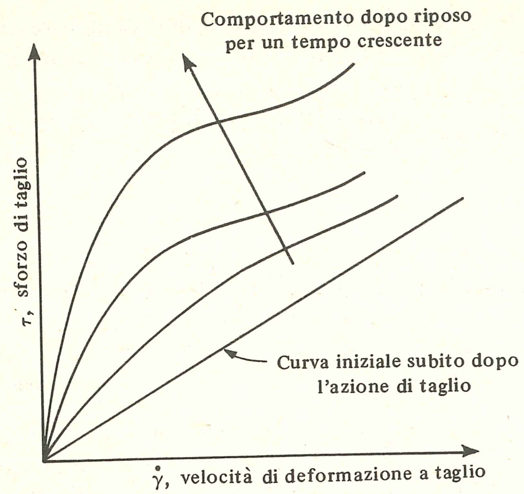


Fig. 12-3. Fluido tixotropico, sotto azione di taglio in tempi diversi.

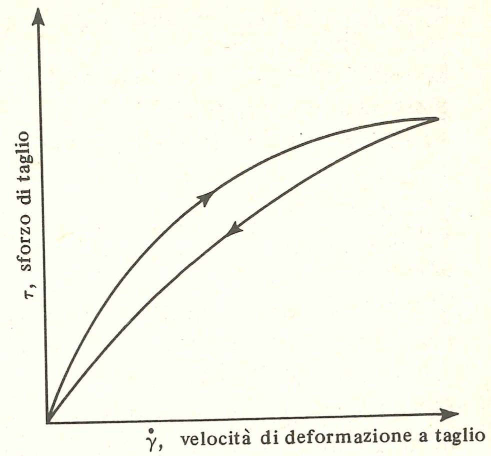


Fig. 12-4. Cicli d'isteresi per un fluido tixotropico.

Se si sottopone a taglio questo tipo di fluido prima con intensità crescente, poi con intensità decrescente, nasce una sorta di ciclo d'isteresi, come si vede in fig. 12-4 per un tipo pseudoplastico. Al diminuire del taglio, la viscosità apparente è minore che al suo aumentare.

Alcuni plastici di Bingham presentano un comportamento tixotropico, ma se lo sforzo è abbastanza alto si fratturano e si comportano come liquidi finché la struttura non si ricostituisce; è il fenomeno che vediamo in fig. 12-5(*a*). Tuttavia alcuni materiali, noti come corpi-falsi, presentano un cedimento a taglio anche dopo che quest'ultimo è stato applicato, anche se con un valore ridotto: vedi fig. 12-5(*b*). Di solito ci vuole molto tempo, perché un corpo-falso riacquisti il proprio valore originale di cedimento a taglio.

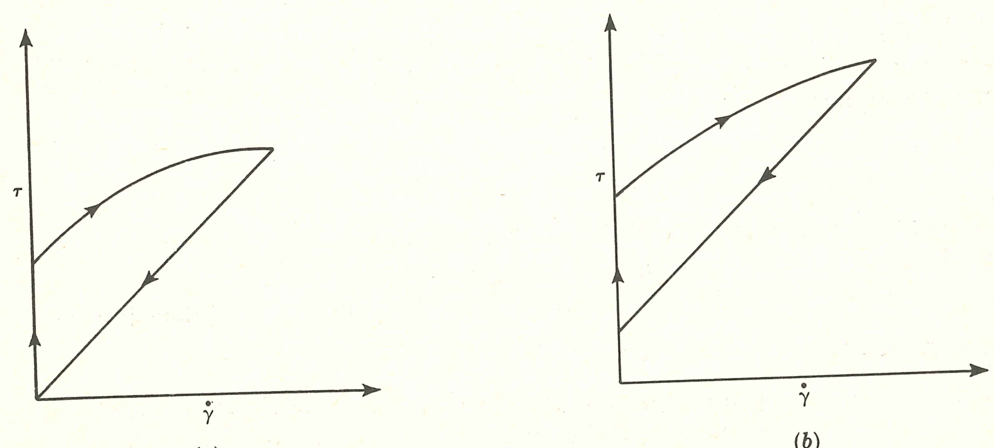


Fig. 12-5. (*a*) Plastico di Bingham tixotropico vero; (*b*) comportamento del corpo-falso.

2. *Fluidi reopectici.*

In questi fluidi la struttura molecolare viene costruita dall'azione di taglio, e il comportamento si presenta opposto che nel caso della tixotropia. Un esempio semplice di formazione di

struttura per azione di taglio è dato dalla battitura, e ispessimento, della chiara d'uovo; quest'ultima non è comunque un vero fluido reopectico. Molte sostanze, sotto forti azioni di taglio, perdono la loro proprietà reopectica e possono addirittura comportarsi come dei fluidi tixotropici.

(*d*) **Fluidi viscoelastici.**

Un materiale viscoelastico presenta delle proprietà sia elastiche che viscose. Il più semplice esempio di un simile materiale è newtoniano per viscosità, e obbedisce alla legge di Hooke nella parte elastica. Possiamo scrivere

$$\dot{\gamma} = \tau/\mu_0 + \dot{\tau}/\lambda \qquad (12.14)$$

in cui λ è un modulo di rigidezza. Nel moto permanente allora $\dot{\gamma} = \dot{\tau}/\mu_0$, e il fluido si comporta come un semplice fluido newtoniano; tuttavia, se lo sforzo di taglio varia, si nota un effetto elastico.

Maxwell propose per primo la (*12.14*) nella forma

$$\tau + (\mu_0/\lambda)\dot{\tau} = \mu_0\dot{\gamma} \qquad (12.15)$$

e i liquidi che seguono questa legge si chiamano *liquidi di Maxwell.* La costante $(\mu_0/\lambda)^{-1}$ è nota come tempo di rilassamento e fisicamente rappresenta il tempo nella legge di decadimento esponenziale dello sforzo per una deformazione costante. Se lo spostamento viene bloccato, lo sforzo si riduce a $e^{-t\lambda/\mu_0}$.

Sono stati sviluppati dei modelli di materiali viscoelastici piuttosto complessi, nei quali compaiono delle derivate rispetto al tempo di τ e γ di ordine superiore. Per i processi che variano nel tempo, le costanti elastiche possono essere delle funzioni complesse della frequenza. Un'elegante presentazione di questi modelli si può trovare in Wilkinson (rif. 7, pag. 240).

12.3 MOTO LAMINARE NELLE TUBAZIONI

(*a*) **Fluidi che seguono la legge della potenza.**

Come applicazione del modello basato sulla legge della potenza, ricaveremo le equazioni della caduta di pressione e del profilo di velocità in funzione della portata, per il moto laminare a regime in una tubazione di un fluido che segua detto modello.

L'equazione dello sforzo di taglio per il moto monodimensionale permanente in coordinate cilindriche (coincidente con l'equazione del moto permanente a regime) è

$$\frac{d}{dr}(r\tau) = r\left(\frac{dp}{dz}\right) \qquad (12.16)$$

che, integrata per il moto nella tubazione, ci dà

$$\tau = -\frac{r}{2}\left(\frac{dp}{dz}\right) \qquad (12.17)$$

in cui τ è lo sforzo di taglio, positivo quando agisce a monte sulla superficie di un elemento cilindrico, e dp/dz è il gradiente di pressione a valle, come si vede in fig. 12-6.

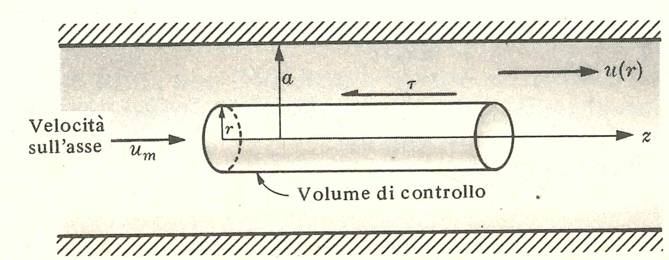


Fig. 12-6. Moto unidimensionale in una tubazione.

Per un fluido che segue la legge della potenza, l'equazione reologica è

$$\tau = k\left(-\frac{du}{dr}\right)^n \qquad (12.18)$$

che ci dà

$$k\left(-\frac{du}{dr}\right)^n = -\frac{r}{2}\left(\frac{dp}{dz}\right) \qquad (12.19)$$

ovvero, usando la notazione $-dp/dz = G$ e riordinando la (*12.19*),[2]

$$-\frac{du}{dr} = \left(\frac{G}{2k}\right)^{1/n} r^{1/n} \qquad (12.20)$$

Integrando la (*12.20*),

$$\int_u^0 -du = \int_r^a \left(\frac{G}{2k}\right)^{1/n} r^{1/n}\, dr \qquad (12.21)$$

che ci dà

$$u = \frac{n}{n+1}\left(\frac{G}{2k}\right)^{1/n}\left(a^{(n+1)/n} - r^{(n+1)/n}\right) \qquad (12.22)$$

La portata totale è

$$Q = \int_0^a 2\pi u r\, dr \qquad (12.23)$$

Sostituendo la (*12.22*) nella (*12.23*) e integrando,

$$Q = \frac{n\pi}{(3n+1)}\left(\frac{G}{2k}\right)^{1/n} a^{(3n+1)/n} \qquad (12.24)$$

La velocità media è $V = Q/\pi a^2$, e quindi

$$V = \frac{n}{(3n+1)}\left(\frac{G}{2k}\right)^{1/n} a^{(n+1)/n} \qquad (12.25)$$

Ponendo $G = (\Delta p)/L$ per un moto in tubazione (L = lunghezza del tubo, Δp = caduta di pressione, $D = 2a$, diametro del tubo), la (*12.25*) si può scrivere

$$\frac{2(3n+1)}{n}\frac{V}{D} = k^{-1}\left(\frac{D\,\Delta p}{4L}\right)^{1/n} \qquad (12.26)$$

Per un fluido newtoniano ($k = \mu$, $n = 1$), la (*12.26*) si riduce alla familiare equazione del moto di Poiseuille

$$\frac{8V}{D} = \frac{D\,\Delta p}{4\mu L} \qquad (12.27)$$

Sostituendo la $(G/2k)^{1/n}$ ricavata dalla (*12.25*) nella (*12.22*) avremo il profilo di velocità in funzione della velocità media,

$$\frac{u}{V} = \left(\frac{3n+1}{n+1}\right)\left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^{(n+1)/n}\right] \qquad (12.28)$$

La fig. 12-7 presenta dei profili di velocità, dati dalla (*12.28*) e tracciati per diversi valori di n.

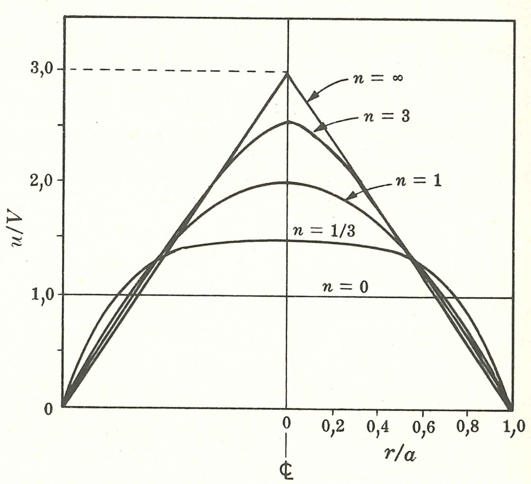


Fig. 12-7. Profili di velocità in un tubo circolare: il fluido segue la legge della potenza. Si usano diversi valori di n.

[2] Nel ragionamento che segue, G è un numero positivo. Il moto è positivo nel senso delle z positive; dp/dz ha valore negativo (e G è positivo).

Più basso è il valore di n, più piatto è il profilo di velocità; infine, per piccolissimi n, il profilo ha la forma di un tappo: solo il fluido adiacente alle pareti risente dell'azione di taglio. E' praticamente impossibile distinguere il profilo stesso da quello di un plastico di Bingham (vedi fig. 12-8).

In certi casi un fluido può essere soddisfacentemente trattato come un plastico di Bingham, o come se fosse regolato dalla legge della potenza; è stato il caso di certi fanghi di sigillatura per trivellazioni.

(*b*) **Plastici di Bingham.**

Nel caso del moto laminare di un plastico di Bingham, l'equazione dello sforzo di taglio da sostituire nella (*12.17*) è

$$\tau = \tau_y + \mu_p \dot{\gamma} \qquad (12.29)$$

in cui $\tau > \tau_y$; se $\tau < \tau_y$, allora $\dot{\gamma} = 0$ e il fluido si muove come un tappo, il cui raggio di curvatura sia r_p (vedi fig. 12-8). Per il moto in un tubo di raggio a, abbiamo

$$\tau = \tfrac{1}{2} rG = \tau_y - \mu_p \frac{du}{dr} \qquad (12.30)$$

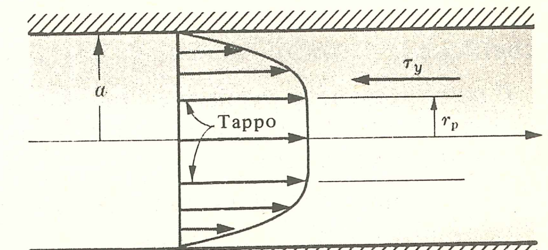


Fig. 12-8. Moto di un fluido di Bingham in tubo circolare.

per $r_p < r < a$; e per $r < r_p$, $du/dr = 0$. In corrispondenza a $r = r_p$, $du/dr = 0$, che ci dà

$$r_p = 2\tau_y/G \qquad (12.31)$$

Integrando la (*12.30*) rispetto alla velocità abbiamo

$$\int_0^u du = \frac{1}{\mu_p}\int_a^r (\tau_y - \tfrac{1}{2} rG)\, dr \qquad (12.32)$$

in modo che per $r_p < r < a$,

$$u = \frac{G}{4\mu_p}(a^2 - r^2) - \frac{\tau_y}{\mu_p}(a - r) \qquad (12.33)$$

Ponendo $r = r_p = 2\tau_y/G$, la (*12.33*) porge

$$u_p = \frac{\tau_y^2}{\mu_p G}(a/r_p - 1)^2, \qquad r_p > r > 0 \qquad (12.34)$$

La portata che abbiamo, dopo aver integrato la velocità sulla sezione trasversale del tubo, è

$$Q = \frac{\pi a^4 G}{8\mu_p}\left[1 - \frac{4}{3}\left(\frac{2\tau_y}{aG}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{2\tau_y}{aG}\right)^4\right] \qquad (12.35)$$

che si riduce all'espressione di Poiseuille per $\tau_y = 0$. Detta equazione, chiamata anche equazione di Buckingham, fornisce in veste di funzione implicita il gradiente di pressione $G = (\Delta p/L)$.

12.4 METODO GENERALIZZATO PER IL MOTO IN TUBAZIONI

(*a*) **Numero di Reynolds generalizzato; coefficiente d'attrito per fluidi pseudoplastici.**

Metzner e Reed (vedi rif. 3, pag. 240) hanno trovato un metodo per calcolare un numero di Reynolds generalizzato, da usare per i coefficienti d'attrito nel moto sia laminare che turbolento dei fluidi non dipendenti dal tempo.

Come nel caso dei fluidi newtoniani, il numero di Reynolds generalizzato si può definire con

$$N_R' = \frac{8\rho V^2}{\tau_{0L}} \qquad (12.36)$$

in cui τ_{0L} è lo sforzo di taglio alla parete corrispondente al moto laminare; V è la velocità media.

Se definiamo il coefficiente d'attrito di Fanning[3] con la

$$f = \frac{2\tau_0}{\rho V^2} \qquad (12.37)$$

per il moto laminare abbiamo la relazione

$$f = \frac{16}{N'_R} \qquad (12.38)$$

tra coefficiente d'attrito e numero di Reynolds, per fluidi newtoniani.

Il passo successivo nel metodo è di applicare i risultati di prove fatte su tubi capillari, o altri sistemi, per determinare delle costanti reologiche che possano essere usate nel calcolo del numero di Reynolds generalizzato.

Si misurano caduta di pressione Δp e velocità media V, e con la relazione

$$\frac{\Delta p}{4L} = \tau_0 = K'(8V/D)^{n'} \qquad (12.39)$$

si ricavano due costanti per il fluido; K' è l'indice di consistenza, n' l'indice di comportamento del moto. Nel caso di moto di Poiseuille di un fluido newtoniano, $8V/D$ sarebbe la velocità di taglio in parete. n' è la tangente alla curva di $\log \tau_0$, tracciata in funzione di $\log 8V/D$:

$$n' = \frac{d(\log \tau_0)}{d(\log 8V/D)} \qquad (12.40)$$

La *(12.39)* è basata su di una espressione di Mooney per la velocità di taglio in parete:

$$-\left(\frac{du}{dr}\right)_w = \left(\frac{3n'+1}{4n'}\right)\left(\frac{8V}{D}\right) \qquad (12.41)$$

Le *(12.39)*, *(12.40)* e *(12.41)* valgono anche per altri fluidi, cioè n' e K' non sono necessariamente delle costanti. Nel caso particolare dei fluidi che seguono la legge della potenza, $n = n'$ e

$$K' = k\left(\frac{3n+1}{n}\right)^n \qquad (12.42)$$

Sostituendo τ_0 dalla *(12.39)* nella *(12.36)*, l'espressione del numero di Reynolds generalizzato ci dà

$$N'_R = \frac{D^{n'} V^{(2-n')}\rho}{K'(8)^{(n'-1)}} \qquad (12.43)$$

Per un fluido newtoniano $n' = 1$ e $N'_R = \rho VD/K'$, così che $K' = \mu$, viscosità.

(*b*) Moto turbolento.

Dodge e Metzner (rif. 1, pag. 240) hanno trovato per i fluidi newtoniani una relazione, basata sulla formula logaritmica della resistenza di von Karman, tra coefficiente d'attrito e numero di Reynolds generalizzato N'_R. Questa equazione è valida per un fluido che segue la legge della potenza e percorre tubazioni lisce:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = \frac{4{,}0}{(n')^{0{,}75}} \log_{10}\left[N'_R f^{1-n'/2}\right] - \frac{0{,}4}{(n')^{1{,}2}} \qquad (12.44)$$

[3] Il coefficiente d'attrito di Fanning è diverso da quello, già usato, di Darcy (capitoli 4 e 5) per un coefficiente 4: (f Darcy) = = 4 × (f Fanning).

In fig. 12-9 vediamo una rappresentazione grafica di questa equazione, che non dà esplicitamente il coefficiente f:

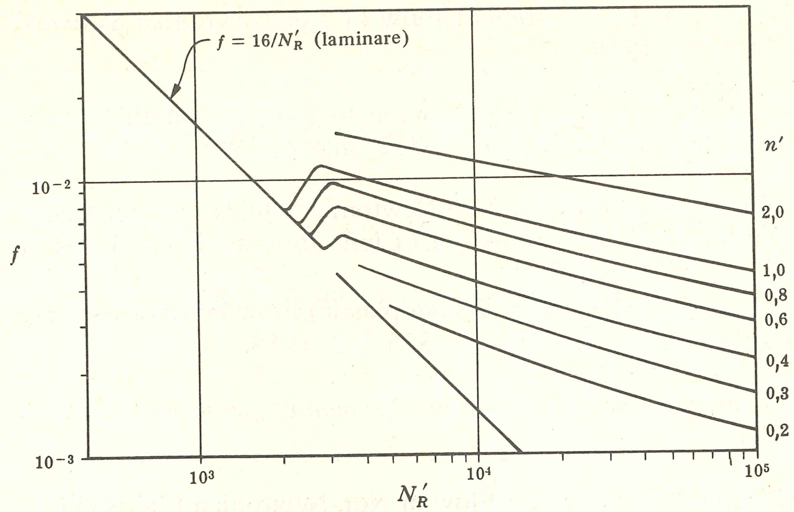


Fig. 12-9. Coefficiente d'attrito di Fanning f in funzione del numero di Reynolds N'_R (equazione *(12.44)*).

I dati di Dodge e Metzner mostrano che il numero di Reynolds critico generalizzato che corrisponde all'insorgere della turbolenza aumenta al diminuire dell'indice di comportamento n': N'_R critico passa da 2100 per $n' = 1$ a 3100 per $n' = 0{,}38$. Non esiste comunque un criterio esatto per il numero di Reynolds critico.

(*c*) Moto anomalo (turbolento) dei fluidi non newtoniani.

Anche se si è trovato che un gran numero di fluidi non newtoniani soddisfano ai criteri di Metzner per il moto turbolento generalizzato, si sono trovate delle soluzioni di alcuni composti organici ad alto peso molecolare che presentano dei coefficienti di attrito molto più bassi di quelli calcolabili dalle relazioni tipo *(12.44)* per il moto turbolento. Invece di livellarsi dopo aver raggiunto il numero di Reynolds critico, il coefficiente d'attrito continua a scadere rapidamente quasi come la curva del moto laminare, rendendo evidente che è scomparsa la turbolenza, oppure che il suo insorgere è stato ritardato. Questa tendenza in certi fluidi continua, fino a raggiungere dei coefficienti d'attrito dall'ordine di grandezza inferiore a quello dell'acqua.

Queste caratteristiche vengono riscontrate nelle gomme tipo Guar, e in certi polimeri che vengono commercialmente aggiunti ai fluidi da pompare per ridurne l'attrito: sono particolarmente utili nel trattamento dei pozzi di petrolio, nei quali vanno spesso pompate enormi quantità di fluido in breve tempo. Uno svantaggio, in questi composti ad alto peso molecolare, è la loro suscettibilità alla decomposizione: a causa degli elevati sforzi di taglio le loro grandi molecole si frantumano, e scompaiono le proprietà riduttive dell'attrito.

Delle melme composte da solidi dispersi in acqua, con la fase solida non del tutto dispersa, possono produrre nel moto turbolento un attrito minore dell'acqua nelle tubazioni. In corrispondenza alle pareti del tubo, la fase liquida si separa da quella solida per formare uno strato a bassa viscosità. Il nucleo della melma è più rigido, e tende a scivolare come un tappo. C'è un minore trasferimento di quantità di moto turbolenta tra strato limite e nucleo: lo strato limite laminare è dunque più spesso, e il coefficiente d'attrito minore di quanto sarebbe per il passaggio di sola acqua. Le melme di carbone ad alta concentrazione evidenziano un coefficiente d'attrito molto inferiore di quello dell'acqua, e lo stesso succede nel moto turbolento della pasta di carta sospesa in acqua. Il suo coefficiente d'attrito diminuisce all'aumentare della concentrazione della pasta.

BIBLIOGRAFIA

1. Dodge D. W., Metzner A. B., "Turbulent Flow of Non-Newtonian Systems", *A.I.Ch.E. Journal,* 5, pp. 189-204, 1959.

2. Fredricson A. G., Bird R. Byron, "Non-Newtonian Flow in Annuli", *Industrial and Engineering Chemistry,* 50, No. 3, pp. 347-352, marzo, 1958.

3. Metzner A. B., Reed J. C., "Flow of Non-Newtonian Fluids - Correlation of the Laminar Transition and Turbulent-flow Regions", *A.I.Ch.E. Journal,* 1, pp. 434-440, 1955.

4. Savins J. G., "Generalized Newtonian (Pseudoplastic) Flow in Stationary Pipes and Annuli", *Petrolium Transactions, A.I.M.E.,* 213, pp. 325-332, 1958.

5. Streeter V. L. (a cura di), *Handbook of Fluid Dynamics*, capitolo 7, di A. B. Metzner, McGraw Hill, 1961.

6. Vaughn R. D., Bergman D., "Laminar Flow of Non-Newtonian Fluids in Concentric Annuli", *Industrial and Engineering Chemistry - Process Design and Development*, 5, No. 1, pp. 44-47, 1966.

7. Wilkinson W. L., *Non-Newtonian Fluids*, Pergamon Press, 1960.

PROBLEMA RISOLTO

12.1. Una melma di argilla ($K' = 1{,}693$, misurata in forza, lunghezza e tempo: kg, m, s; la potenza dipende da n') e $n' = 581$, dev'essere pompata a 1150 galloni/min in una tubazione dal diametro interno di 3,826 pollici. Quale sarà la caduta di pressione nella condotta?

1150 galloni/min corrispondono a 2,56 piedi cubici/s = 72,5 lt/s. La sezione della tubazione è di 0,0798 piedi quadrati, e la velocità di 32 piedi/s = 9,77 m/s. Dalla (*12.43*) vediamo che il numero di Reynolds modificato è $N'_R = 19900$, in pieno regime turbolento. Dalla (*12.44*) il coefficiente d'attrito di Fanning è 0,00442: non lo si trova esplicitamente, ma facilmente lo si determina inserendo un valore di tentativo di f nella $\log_{10}(N'_R f^{1-n'/2})$. La (*12.44*) si risolve quindi per tentativi, con successivi valori approssimati di f, che convergono al valore corretto. f si può anche ricavare dalla fig. 12-9. Il gradiente di pressione $(\Delta p)/L$ si trova nel solito modo, con la formula

$$\tau_0 = \frac{D\,\Delta p}{4L} = \frac{f\rho V^2}{2}$$

e abbiamo $(\Delta p)/L = 0{,}396$ libbre su pollice quadrato, per piede di lunghezza di tubazione (0,091 kg/ /cm^2/m).

PROBLEMI SUPPLEMENTARI

12.2. Delle misure reometriche in tubo capillare forniscono per un fluido un diagramma di $\log \tau_0$, $\log 8V/D$ che è una linea retta tra $8V/D = 88\ s^{-1}$ e $8V/D = 5400\ s^{-1}$, per τ_0 che varia tra 1,20 e 2,50. Che caduta di pressione avremo se il fluido scorre in una tubazione dal diametro interno di 3,820 pollici, con una portata di 400 galloni/min? Il moto è laminare o turbolento?

12.3. Dimostrare che il profilo di velocità per un fluido che segue la legge della potenza, e scorre tra due lastre parallele, è esprimibile con la

$$u = \frac{n}{1+n}\left(\frac{G}{k}\right)^{1/n} [h^{(n+1)/n} - y^{(n+1)/n}]$$

nella quale h è la semilarghezza del canale, ed y la coordinata misurata dall'asse di simmetria.

12.4. Trovare il profilo di velocità per un plastico di Bingham che scorre tra due lastre parallele.

NOMENCLATURA USATA NEL CAPITOLO 12

a	=	raggio della tubazione
A, B, C	=	costanti usate in diverse relazioni sforzo-deformazione
D	=	diametro
f	=	coefficiente d'attrito di Fanning
G	=	$-dp/dz$, gradiente di pressione in una tubazione
k	=	costante di proporzionalità per un fluido che segue la legge della potenza
K'	=	indice di consistenza
L	=	lunghezza
n	=	esponente per un fluido che segue la legge della potenza
n'	=	indice di comportamento del moto
N'_R	=	numero di Reynolds generalizzato, $8\rho V^2/\tau_{0L}$
p	=	pressione
Q	=	portata in volume
r	=	coordinata radiale
r_p	=	raggio del tappo centrale in una tubazione
u	=	velocità
u_m	=	velocità massima
u_p	=	velocità del tappo centrale in una tubazione
V	=	velocità media
γ	=	deformazione a taglio
$\dot{\gamma}$	=	velocità di deformazione a taglio
λ	=	modulo di rigidezza
μ	=	viscosità
μ_a	=	viscosità apparente
μ_0	=	viscosità a velocità di taglio zero
μ_p	=	viscosità plastica
μ_∞	=	valore asintotico della viscosità apparente, per alte velocità di taglio
τ	=	sforzo di taglio
$\dot{\tau}$	=	velocità di taglio
τ_0	=	sforzo di taglio in parete
τ_{0L}	=	sforzo di taglio in parete, nel moto laminare
τ_y	=	sforzo di cedimento

APPENDICE A

Alcune proprietà dei fluidi

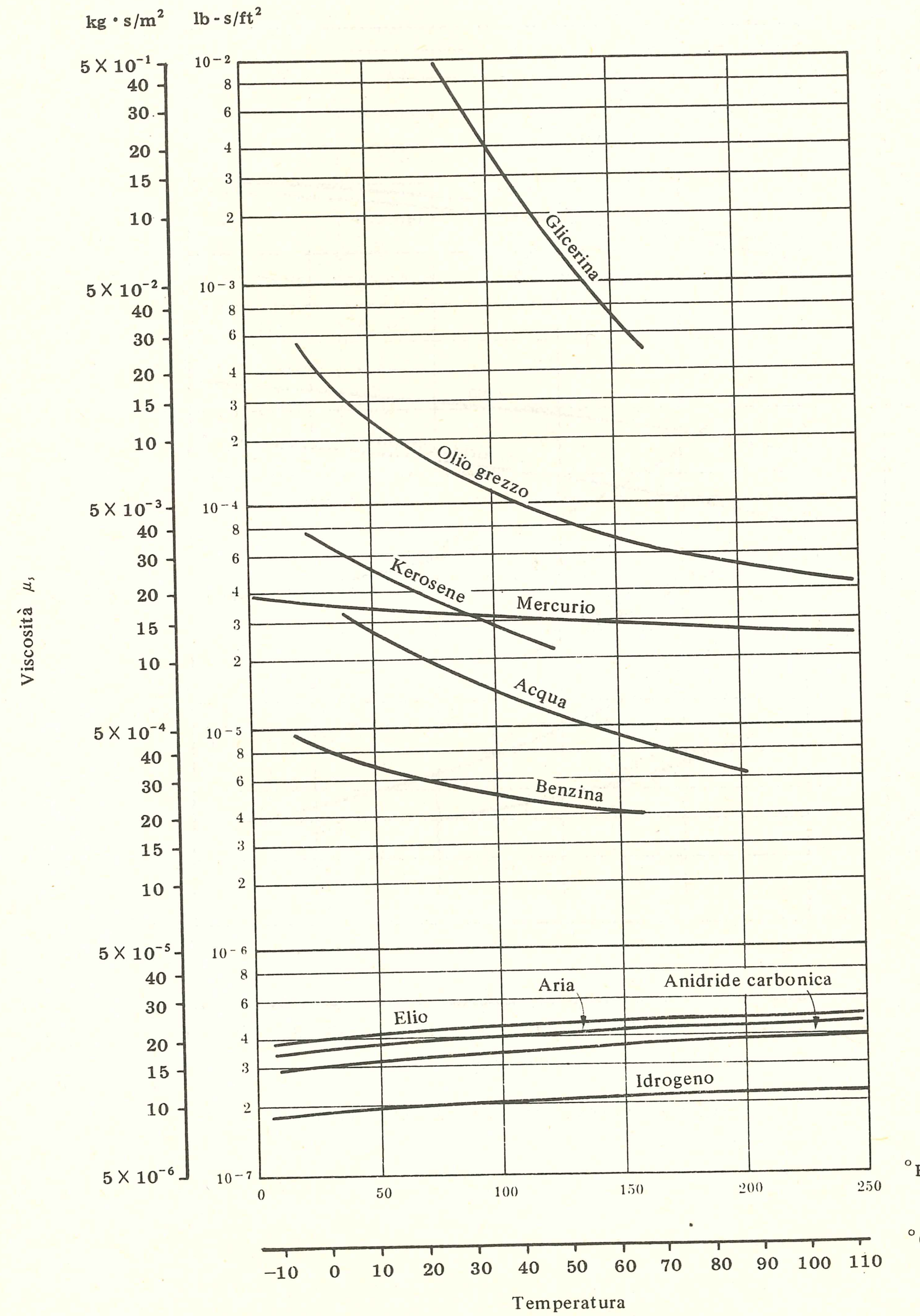


Fig. A-1. Viscosità assoluta di alcuni fluidi.

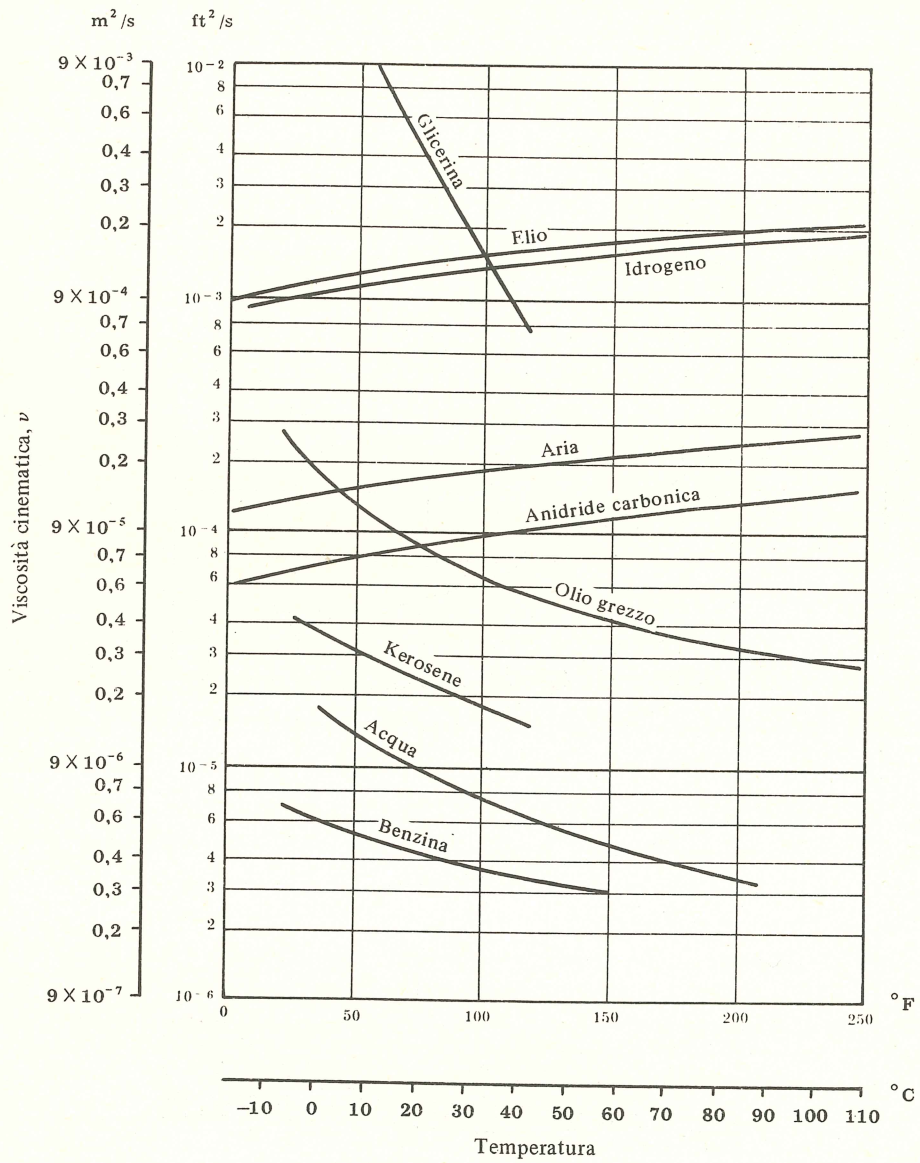


Fig. A-2. Viscosità cinematica di alcuni fluidi.

TABELLA A.1. PROPRIETA' DELL'ACQUA A PRESSIONE ATMOSFERICA

Temperatura		Densità		Viscosità		Viscosità cinematica	
°C	°F	g/cm³	slug/ft³	dine · s/cm²	lb$_f$ - s/ft²	cm²/s	ft²/s
0	32	0,99987	1,940	$1{,}794 \times 10^{-2}$	$3{,}746 \times 10^{-5}$	$1{,}794 \times 10^{-2}$	$1{,}930 \times 10^{-5}$
4	39	1,00000	1,941	1,568	3,274	1,568	1,687
5	41	0,99999	1,941	1,519	3,172	1,519	1,634
10	50	0,99973	1,940	1,310	2,735	1,310	1,407
15	59	0,99913	1,940	1,145	2,391	1,146	1,233
20	68	0,998	1,937	1,009	2,107	1,011	1,088
30	86	0,996	1,932	0,800	1,670	0,803	0,864
40	104	0,992	1,925	0,654	1,366	0,659	0,709
50	122	0,988	1,917	0,549	1,146	0,556	0,598
60	140	0,983	1,907	0,470	0,981	0,478	0,514
70	158	0,978	1,897	0,407	0,850	0,416	0,448
80	176	0,972	1,885	0,357	0,745	0,367	0,395
90	194	0,965	1,872	0,317	0,662	0,328	0,353
100	212	0,958	1,858	0,284	0,593	0,296	0,318

TABELLA A.2. PROPRIETA' DELL'ARIA A PRESSIONE ATMOSFERICA

Temperatura		Densità		Viscosità		Viscosità cinematica	
°C	°F	g/cm³	slug/ft³	dine · s/cm²	lb$_f$ - s/ft²	cm²/s	ft²/s
0	32	$1{,}293 \times 10^{-3}$	$2{,}510 \times 10^{-3}$	$1{,}709 \times 10^{-4}$	$3{,}568 \times 10^{-7}$	0,1322	$1{,}427 \times 10^{-4}$
50	122	1,093	2,122	1,951	4,074	0,1785	1,921
100	212	0,946	1,836	2,175	4,541	0,2299	2,474
150	302	0,834	1,619	2,385	4,980	0,2860	3,077
200	392	0,746	1,448	2,582	5,391	0,3461	3,724
250	482	0,675	1,310	2,770	5,784	0,4104	4,416
300	572	0,616	1,196	2,946	6,151	0,4782	5,145
350	662	0,567	1,101	3,113	6,500	0,5490	5,907
400	752	0,525	1,019	3,277	6,842	0,6246	6,721
450	842	0,488	0,947	3,433	7,168	0,7035	7,570
500	932	0,457	0,887	3,583	7,481	0,7840	8,436

APPENDICE B

Unità di misura e dimensioni

Nella meccanica dei fluidi abbiamo a che fare con grandezze misurabili: pressione, velocità, densità, viscosità. Esse sono collegate da equazioni, ricavate a loro volta da leggi o definizioni, e contengono alcune, o tutte le dimensioni fondamentali: forza (F), massa (M), lunghezza (L), tempo (T) e temperatura (θ). Per poter quantizzare queste dimensioni, si impone l'adozione di un sistema di unità di misura. (Nella teoria dell'elettromagnetismo incontriamo un'altra dimensione fondamentale, che è arbitraria; spesso conviene assumere l'unità di carica, che in unità MKS è in coulomb. Dunque in magnetoidrodinamica abbiamo cinque dimensioni fondamentali.)

Delle equazioni che rappresentano relazioni tra grandezze fisiche debbono essere dimensionalmente omogenee: un termine dell'equazione deve avere le stesse dimensioni dell'altro.

Si avranno delle difficoltà se le unità di massa e di forza vengono fissate indipendentemente; ma le diverse discipline collegate alla fluidodinamica – aerodinamica, termodinamica e trasmissione del calore – hanno un loro modo sperimentato di affrontare il problema: quello che meglio serve alle singole necessità.

Dalla legge di Newton sappiamo che forza e massa non sono dimensioni indipendenti. La forza è proporzionale al prodotto della massa per l'accelerazione, ovvero

$$\mathbf{F} \propto m\mathbf{a}$$

E cercando l'omogeneità dimensionale otteniamo:

$$(F) = \left(\frac{ML}{T^2}\right) \quad \text{o} \quad (M) = \left(\frac{FT^2}{L}\right)$$

Dunque l'effettiva scelta delle dimensioni fondamentali è in un certo modo arbitraria; si può usare un sistema F, L, T, θ o un sistema M, L, T, θ. E tutte le altre dimensioni si possono esprimere in funzione di quelle indipendenti prescelte, per mezzo di leggi e definizioni.

Con la legge di Newton definiremo ora l'unità di massa, in funzione di forza e accelerazione. Scriviamo

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad \text{o} \quad m = \frac{F}{a}$$

Se l'unità di forza è il kg_f (kilogrammo forza) e l'unità di accelerazione il m/s^2, l'unità di massa risulta

$$\frac{\text{kg}_\text{f}\ \text{s}^2}{\text{m}}$$

Ed è la quantità di massa che viene accelerata di 1 m/s^2 quando su di essa agisce la forza di 1 kg. Questa è l'*unità tecnica di massa* (UTM).

Si usa anche un'altra unità di massa, fissata in modo indipendente dalla legge di Newton: il kilogrammo massa (kg_m), definito come la quantità di massa che viene attratta verso la superficie della terra dalla forza di un kilogrammo (in una certa località). Quando le unità di forza e di mas-

sa vengono definite indipendentemente dalla legge di Newton dobbiamo scrivere l'equazione con un fattore di conversione k, affinché l'equazione risulti dimensionalmente omogenea. Abbiamo

$$\mathbf{F} = km\mathbf{a} \quad \text{ovvero} \quad \mathbf{F} = \frac{1}{g_c} m\mathbf{a}$$

e

$$g_c = \frac{ma}{F}$$

La grandezza g_c ha valore numerico e unità di misura che dipendono dalle particolari unità prescelte per forza, massa, accelerazione. Degli insiemi di valori sono:

$$g_c = \frac{1(\text{UTM})\ (\text{m/s}^2)}{\text{kg}_\text{f}} \qquad g_c = \frac{9{,}8(\text{kg}_\text{m})\ (\text{m/s}^2)}{\text{kg}_\text{f}}$$

$$g_c = \frac{1(\text{g}_\text{m})\ (\text{cm/s}^2)}{\text{dine}} \qquad g_c = \frac{1(\text{kg}_\text{m})\ (\text{m/s}^2)}{\text{newton}}$$

da cui vediamo che 1 UTM = 9,8 kg_m

e notiamo che 1 kg_m verrà accelerato di 9,8 m/s^2 quando su di esso agisca la forza di 1 kg. Nella maggior parte del libro si usa la UTM, quindi non compare la grandezza g_c.

Nella tabella B.1 troviamo alcune grandezze fisiche e le loro dimensioni; nella B.2 sono riportati alcuni fattori di conversione.

Il seguente esempio illustra il metodo per applicare correttamente le conversioni. Risolvere l'espressione con h_0 in m - $\text{kg}_\text{f}/\text{kg}_\text{m}$, con il valore numerico delle quantità del secondo membro espresso nelle unità indicate.

$$h_0 = u + pv + \frac{V^2}{2}$$

$$u = A\,\frac{\text{kcal}}{\text{kg}_\text{m}} \qquad p = B\,\frac{\text{kg}_\text{f}}{\text{cm}^2} \qquad v = C\,\frac{\text{m}^3}{\text{kg}_\text{m}} \qquad V = D\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Sostituendo nell'equazione i valori numerici, con le loro unità di misura e i fattori di conversione, abbiamo

$$h_0 = A\,\frac{\text{kcal}}{\text{kg}_\text{m}} \times \frac{427\ \text{m kg}_\text{f}}{\text{kcal}} + B\,\frac{\text{kg}_\text{f}}{\text{cm}^2} \times C\,\frac{\text{m}^3}{\text{kg}_\text{m}} \times 10^4\,\frac{\text{cm}^2}{\text{m}^2} + \frac{D^2}{2}\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \times \frac{\text{s}^2\ \text{kg}_\text{f}}{9{,}81\ \text{kg}_\text{m}\ \text{m}} =$$

$$= \left[427\,A + 10^4\,BC + \frac{D^2}{2(9{,}81)}\right] \frac{\text{kg}_\text{f}\ \text{m}}{\text{kg}_\text{m}}$$

Vediamo così che g_c viene considerato un fattore di conversione.

Se riassumiamo, possiamo vedere che conviene scrivere l'equazione $F = ma$ in diversi sistemi di unità di misura. Troviamo nelle equazioni che seguono la correlazione tra dimensioni e unità di misura.

Sistema CGS:	F (dine)	= m (grammi)	× a (cm/s^2)
Sistema MKS:	F (newton)	= m (kilogrammi)	× a (m/s^2)
Sistema tecnico:	F (kilogrammi)	= m (UTM)	× a (m/s^2)
Sistema FSS:	F (lb_f)	= m (lb_m, slug).	× a (ft/s^2)
Sistema FPS:	F (lb_f, poundal)	= m (lb_m)	× a (ft/s^2)

TABELLA B.1. DIMENSIONI E UNITA'

GRANDEZZA	Dimensioni		Unità				
			Metriche			Inglesi	
	Sistema *MLT*	Sistema *FLT*	Sistema CGS	Sistema MKS	Sistema tecnico	Sistema FPS	Sistema degli Ingegneri
Lunghezza	L	L	cm	m	m	ft	ft
Massa	M	$FL^{-1}T^2$	g	kg	UTM	lb_m	slug
Tempo	T	T	s	s	s	s	s
Velocità	LT^{-1}	LT^{-1}	cm/s	m/s	m/s	ft/s	ft/s
Accelerazione	LT^{-2}	LT^{-2}	cm/s^2	m/s^2	m/s^2	ft/s^2	ft/s^2
Forza	MLT^{-2}	F	$g\ cm/s^2$ = dine	$kg\ m/s^2$ = newton	$UTM\ m/s^2$ = kilogrammo	$lb_m\ ft/s^2$ = poundal	$slug\ ft/s^2 = lb_f$
Quantità di moto. Impulso	MLT^{-1}	FT	g cm/s = dine s	kg m/s = N s	$UTM\ m^2/s$ = kg s	lb_m ft/s = pdl s	slug ft/s = lb_f s
Energia, Lavoro	ML^2T^{-2}	FL	$g\ cm^2/s^2$ = dine cm = erg	$kg\ m^2/s^2$ = N m = joule	$UTM\ m^2/s^2$ = kg m	$lb_m\ ft^2/s^2$ = ft pdl	$slug\ ft^2/s^2$ = ft lb_f
Potenza	ML^2T^{-3}	FLT^{-1}	$g\ cm^2/s^3$ = dine cm/s ≐ erg/s	$kg\ m^2/s^3$ = joule/s = watt	kg m/s	$lb_m\ ft^2/s^3$ = ft pdl/s	$slug\ ft^2/s^3$ = ft lb_f/s
Densità	ML^{-3}	$FL^{-4}T^2$	g/cm^3	kg/m^3	UTM/m^3	lb_m/ft^3	$slug/ft^3$
Velocità angolare	T^{-1}	T^{-1}	rad/s	rad/s	rad/s	rad/s	rad/s
Accelerazione angolare	T^{-2}	T^{-2}	rad/s^2	rad/s^2	rad/s^2	rad/s^2	rad/s^2
Momento torcente	ML^2T^{-2}	FL	$g\ cm^2/s^2$ = dine cm	$kg\ m^2/s^2$ = N m	kg m	$lb_m\ ft^2/s^2$ = ft pdl	$slug\ ft^2/s^2$ = ft lb_f
Momento della quantità di moto	ML^2T^{-1}	FLT	$g\ cm^2/s$	$kg\ m^2/s$	kg ms	$lb_m\ ft^2/s$	$slug\ ft^2/s$
Momento di inerzia	ML^2	FLT^2	$g\ cm^2$	$kg\ m^2$	$UTM\ m^2$	$lb_m\ ft^2$	$slug\ ft^2$
Pressione, Sforzo	$ML^{-1}T^{-2}$	FL^{-2}	$g/(cm\ s^2)$ = $dine/cm^2$	$kg/(m\ s^2)$ = N/m^2	kg/m^2	pdl/ft^2	lb_f/ft^2
Viscosità (μ)	$ML^{-1}T^{-1}$	$FL^{-2}T$	g/(cm s) = $dine\ s/cm^2$	kg/(m s) = $N\ s/m^2$	$kg\ s/m^2$	lb_m/(ft s) = $pdl\ s/ft^2$	slug/(ft s) = $lb_f\ s/ft^2$
Viscosità cinematica (ν)	L^2T^{-1}	L^2T^{-1}	cm^2/s	m^2/s	m^2/s	ft^2/s	ft^2/s
Tensione superficiale	MT^{-2}	FL^{-1}	g/s^2 = dine/cm	kg/s^2 = N/m	kg/m	lb_m/s^2 = pdl/ft	$slug/s^2$ = lb_f/ft

TABELLA B.2. FATTORI DI CONVERSIONE

Lunghezza

1 kilometro (km)	= 1000 metri	1 pollice (in)	= 2,540 cm
1 metro (m)	= 100 centimetri	1 piede (ft)	= 30,48 cm
1 centimetro (cm)	= 10^{-2} m	1 miglio (mi)	= 1,609 km
1 millimetro (mm)	= 10^{-3} m	1 mil	= 10^{-3} in
1 micron (μ)	= 10^{-6} m	1 centimetro	= 0,3937 in
1 millicron (mμ)	= 10^{-9} m	1 metro (m)	= 39,37 in
1 angstrom (Å)	= 10^{-10} m	1 kilometro	= 0,6214 miglia

Area

1 metro quadrato (m^2) = 10,76 ft^2

1 piede quadrato (ft^2) = 929 cm^2

Volume

1 litro (*lt*) = 1000 cm^3 = 1,057 quart (qt) = 61,02 in^3 = 0,03532 ft^3

1 metro cubo (m^3) = 1000 *lt* = 35,32 ft^3

1 piede cubo (ft^3) = 7,481 U.S. gal = 0,02832 m^3 = 28,32 *lt*

1 gallone USA (gal) = 231 in^3 = 3,785 *lt* 1 gallone inglese = 1,201 gal = 277,4 in^3

Massa

1 kilogrammo = 2,2046 lb_m = 0,06852 slug = 0,102 UTM; 1 lb_m = 453,6 g = 0,03108 slug

1 slug = 32,174 lb_m = 14,59 kg = 1,488 UTM

Velocità

1 km/h = 0,2778 m/s = 0,6214 mi/h = 0,9113 ft/s

1 mi/h = 1,467 ft/s = 1,609 km/h = 0,4470 m/s

Densità

1 g/cm^3 = 10^3 kg/m^3 = 62,43 lb_m/ft^3 = 1,940 slug/ft^3 = 102 UTM/m^3

1 lb_m/ft^3 = 0,01602 g/cm^3; 1 slug/ft^3 = 0,5154 g/cm^3

Forza

1 newton (N) = 10^5 dines = 0,1020 kg_f = 0,2248 lb_f

1 libbra forza (lb_f) = 4,448 N = 0,4536 kg_f = 32,17 poundals

1 kilogrammo forza (kg_f) = 2,205 lb_f = 9,807 N

1 U.S. short ton = 2000 lb_f; 1 long ton = 2240 lb_f; 1 tonnellata = 2205 lb_f = 1000 kg_f

Energia

1 joule = 1 N m = 10^7 erg = 0,7376 ft lb_f = 0,2389 cal = 9,481 × 10^{-4} Btu

1 ft lb_f = 1,356 joule = 0,3239 cal = 1,285 × 10^{-3} Btu

1 caloria (cal) = 4,186 joule = 3,087 ft lb_f = 3,968 × 10^{-3} Btu = 0,427 kg m = $\frac{1}{1000}$ kcal

1 Btu = 778 ft lb_f = 1055 joule = 0,293 wattora = 107,61 kg m

1 kilowattora (kWh) = 3,60 × 10^6 joule = 860,0 kcal = 3413 Btu

1 elettron volt (eV) = 1,602 × 10^{-19} joule

Potenza

1 watt = 1 joule/s = 10^7 ergs/s = 0,2389 cal/s

1 horsepower (HP) = 550 ft lb_f/s = 33000 ft lb_f/min = 745,7 watt = 1,014 CV

1 kilowatt (kW) = 1,341 HP = 737,6 lb_f/s = 0,9483 Btu/s

Pressione

1 N/m^2 = 10 dine/cm^2 = 9,869 × 10^{-6} atmosfere = 2,089 × 10^{-2} lb_f/ft^2

1 lb_f/in^2 = 6895 N/m^2 = 5,171 cm mercurio = 70,30 cm acqua

1 atmosfera (atm) = 1,013 × 10^5 N/m^2 = 1,013 × 10^6 dine/cm^2 = 14,70 lb_f/in^2

= 76 cm mercurio = 1033,2 cm acqua

Angolo

1 radiante (rad) = 57,296°; 1° = 0,017453 rad

APPENDICE C

Alcune equazioni fondamentali in diversi sistemi di coordinate*

1. EQUAZIONI DI NAVIER-STOKES DEL MOTO DI UN FLUIDO INCOMPRESSIBILE A VISCOSITA' COSTANTE

Queste equazioni forniscono un ottimo grado di approssimazione per i problemi che riguardano delle variazioni di viscosità, se il gradiente della medesima non è troppo grande. Nella maggior parte dei problemi fisici questa ipotesi è corretta, e le equazioni di Navier-Stokes si possono usare nella maggior parte dei casi che riguardano un flusso incompressibile. Useremo i seguenti simboli:

p = pressione

$\mathbf{F}$ = risultante delle forze esterne

μ = viscosità

$\frac{D}{Dt}$ = derivata sostanziale (che non è la stessa su una componente o su un vettore).

(*a*) **Vettore.**

$\mathbf{V}$ è il vettore velocità.

$$\rho\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \rho\left[\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V}\right] = -\nabla p + \mathbf{F} + \mu\nabla^2\mathbf{V} \qquad \textbf{(A.1)}$$

Il termine $(\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V}$ è un'espressione pseudo-vettoriale, e bisogna stare attenti se la si sviluppa in coordinate diverse da quelle cartesiane. Conviene esprimere questa accelerazione in vera forma vettoriale, scrivendo l'equazione del moto nella forma alternativa:

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{V^2}{2}\right) - \mathbf{V}\times(\nabla\times\mathbf{V})\right] = -\nabla p + \mathbf{F} + \mu\nabla^2\mathbf{V} \qquad \textbf{(A.2)}$$

Attenzione nello sviluppo di $\nabla^2\mathbf{V}$ e $D\mathbf{V}/Dt$, l'operazione su un vettore è diversa da quella su uno scalare. E' utile riferirsi alla seguente identità vettoriale:

$$\nabla^2\mathbf{V} = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{V}) - \nabla\times(\nabla\times\mathbf{V})$$

(*b*) **Tensore cartesiano.**

w_i è la velocità nella direzione x_i:

$$\rho\left[\frac{\partial w_i}{\partial t} + w_j\frac{\partial w_i}{\partial x_j}\right] = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + F_i + \mu\frac{\partial^2 w_i}{\partial x_j\,\partial x_j} \qquad \textbf{(A.3)}$$

(*c*) **Coordinate cartesiane.**

u, v, w sono le velocità nelle direzioni x, y, z. Definiremo qui:

* Per un'esposizione più completa di equazioni utili rimandiamo a: W. F. Hughes, E. W. Gaylord, *Equazioni per l'ingegneria*, Etas Libri, Milano 1975.

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}, \qquad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\begin{aligned}
\rho\frac{Du}{Dt} &= F_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu\nabla^2 u\\
\rho\frac{Dv}{Dt} &= F_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu\nabla^2 v \qquad \textbf{(A.4)}\\
\rho\frac{Dw}{Dt} &= F_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu\nabla^2 w
\end{aligned}$$

Che sviluppate diventano:

$$\begin{aligned}
\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + F_x + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\\
\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + F_y + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \qquad \textbf{(A.5)}\\
\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + F_z + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)
\end{aligned}$$

(*d*) **Coordinate cilindriche:**

v_r, v_θ, v_z sono le velocità nelle rispettive direzioni r, θ, z. Definiamo qui:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\begin{aligned}
\rho\left[\frac{Dv_r}{Dt} - \frac{v_\theta^2}{r}\right] &= F_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu\left[\nabla^2 v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\right] \qquad \textbf{(A.6)}\\
\rho\left[\frac{Dv_\theta}{Dt} + \frac{v_r v_\theta}{r}\right] &= F_\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu\left[\nabla^2 v_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2}\right]\\
\rho\frac{Dv_z}{Dt} &= F_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu\nabla^2 v_z
\end{aligned}$$

Che sviluppate diventano:

$$\rho\left[\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r}\right]$$
$$= F_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu\left[\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\right]$$

$$\rho\left[\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r}\right] \qquad \textbf{(A.7)}$$
$$= F_\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu\left[\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2}\right]$$

$$\rho\left[\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right]$$
$$= F_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left[\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right]$$

(*e*) **Coordinate sferiche.**

v_r, v_θ, v_ϕ sono le velocità rispettivamente nelle direzioni r, θ, ϕ. Definiamo qui appresso:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

$$\rho\left[\frac{Dv_r}{Dt} - \frac{v_\theta^2 + v_r^2}{r}\right] = F_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu\left[\nabla^2 v_r - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2v_\theta \cot\theta}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}\right]$$

$$\rho\left[\frac{Dv_\theta}{Dt} + \frac{v_r v_\theta - v_\phi^2 \cot\theta}{r}\right] = F_\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu\left[\nabla^2 v_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2\theta} - \frac{2\cos\theta}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}\right] \qquad \textbf{(A.8)}$$

$$\rho\left[\frac{Dv_\phi}{Dt} + \frac{v_\phi v_r}{r} + \frac{v_\theta v_\phi \cot\theta}{r}\right] = F_\phi - \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial p}{\partial \phi} + \mu\left[\nabla^2 v_\phi - \frac{v_\phi}{r^2 \sin^2\theta} + \frac{2}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{2\cos\theta}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}\right]$$

Che sviluppate diventano:

$$\rho\left[\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r}\right]$$
$$= F_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial v_r}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \phi^2} - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2v_\theta \cot\theta}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}\right]$$

(A.9)

$$\rho\left[\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\phi^2 \cot\theta}{r}\right]$$
$$= F_\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2\theta} - \frac{2\cos\theta}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}\right]$$

$$\rho\left[\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_\phi v_r}{r} + \frac{v_\theta v_\phi \cot\theta}{r}\right]$$
$$= F_\phi - \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial p}{\partial \phi} + \mu\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial v_\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 v_\phi}{\partial \phi^2} - \frac{v_\phi}{r^2 \sin^2\theta} + \frac{2}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{2\cos\theta}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}\right]$$

2. OPERAZIONI VETTORIALI UTILI

Le operazioni $\frac{D}{Dt}$ e ∇^2 che presentiamo adesso sono da effettuarsi su di uno scalare; solo se si usano coordinate cartesiane esse van bene anche per un vettore.

(*a*) **Coordinate cartesiane.**

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \qquad \textbf{(A.10)}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

(*b*) **Coordinate cilindriche.**

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \qquad \textbf{(A.11)}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

(*c*) **Coordinate sferiche.**

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \qquad \textbf{(A.12)}$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

3. LA FUNZIONE DISSIPAZIONE

La funzione dissipazione meccanica, o viscosa Φ, in coordinate ortogonali generiche risulta definita in funzione del tensore velocità di deformazione e_{ij}:

$$\Phi = \mu[2(e_{11}^2 + e_{22}^2 + e_{33}^2) + (2e_{23})^2 + (2e_{31})^2 + (2e_{12})^2] + \lambda(e_{11} + e_{22} + e_{33})^2 \qquad \textbf{(A.13)}$$

(In alcuni testi la definizione di Φ differisce per un coefficiente μ. λ è il secondo coefficiente di viscosità, definito nel capitolo 3.

(*a*) **Tensore cartesiano, in funzione del tensore degli sforzi.**

$$\Phi = \sigma'_{ij}\frac{\partial w_i}{\partial x_j} \qquad \textbf{(A.14)}$$

(*b*) **Funzione cartesiana.**

$$\Phi = 2\mu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] + \lambda\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right]^2 \qquad \textbf{(A.15)}$$

(*c*) **Funzione cilindrica.**

$$\Phi = \mu\left[2\left\{\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2\right\} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\right)^2\right] + \lambda\left[\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right]^2 \qquad \textbf{(A.16)}$$

(*d*) **Funzione sferica.**

$$\Phi = \mu\left[2\left\{\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta\cot\theta}{r}\right)^2\right\} + \left\{\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{v_\phi}{\sin\theta}\right)\right\}^2 + \left\{\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\phi}{r}\right)\right\}^2 + \left\{r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right\}^2\right] + \lambda\left[\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{2v_r}{r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_\theta\cot\theta}{r}\right]^2 \qquad \textbf{(A.17)}$$

RISPOSTE A PROBLEMI SCELTI

CAPITOLO 2

2.15. (*a*) 282 cm, (*b*) 20,7 cm

2.16. 0,3 kg/cm^2

2.17. 0,05 kg/cm^2

2.18. 0,0014 kg/cm^2

2.19. 0,0003 kg/cm^2

2.20. 265 kg_f

2.22. $3{,}8\,(10)^4$ kg_f; $F_N = 0$

2.23. La stessa che se il contenitore fosse fermo.

2.24. 212 cm

2.25. $p_B - p_A = \gamma$ kg/m²; $p_D - p_A = 7{,}9\,\gamma$ kg/m²; $p_C - p_A = 3\,\gamma$ kg/m²

2.26. $\dfrac{\Delta a}{\Delta p} = \dfrac{D}{4t\gamma}$, in cui D è il diametro medio, e t lo spessore di parete della tazza.

2.30. La superficie dell'acqua risulta parallela al piano inclinato.

2.31. La stessa che si ha nel caso della rotazione di un contenitore aperto, con la profondità minima uguale all'altezza di quello chiuso.

2.32. $p = \frac{1}{2}\rho r^2\omega^2$, e non dipende dalla posizione verticale.

2.33. $p_{\text{in alto}} + \rho a(H - h)$

2.34. $p - p_0 = \frac{1}{2}\rho_1\omega^2 r^2 + \rho_1 g(z_{01} - z)$ per $z_{01} > z - \dfrac{\omega^2 r^2}{2g} > z_{02}$

$p - p_0 = \frac{1}{2}\rho_2\omega^2 r^2 + \rho_2 g(z_{02} - z) + \rho_1 g(z_{01} - z_{02})$ per $z_{02} > z - \dfrac{\omega^2 r^2}{2g}$

Superficie libera: $z = z_{01} + \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2$

Interfaccia: $z = z_{02} + \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2$

2.35. La forma non ha importanza; i parametri importanti sono L ed h.

2.37. Se il pallone è gonfio di elio, si inclina in avanti quando l'auto accelera.

2.38. $\sigma = \dfrac{\pi D^2}{4NA}(p_c + \rho\omega^2 D^2/16)$ in cui ρ = densità dell'olio, σ = sforzo di trazione, N = numero dei bulloni, A = area della sezione trasversale di un bullone, p_c = pressione in arrivo dalla pompa; ω è misurata in rad/s.

CAPITOLO 3

3.14. 0,00034 m^3/s

3.15. $F = \frac{1}{3}\pi\rho a^2 V_0^2 + \pi a^2(p_2 - p_1)$

3.16. $p_1 = p_2 + 2\tau_0 L/a + \rho V_0^2/3$

3.18. 3,2 m/s

3.19. 1,14 kg/cm^2

3.20. (*a*) $Q = \pi a^2 V_c/2$, (*b*) $\frac{1}{3}\pi\rho a^2 V_c^2$, (*c*) $\frac{1}{8}\pi\rho a^2 V_c^3$

3.21. 47,6 CV

3.22. 0,5 m^3/s; 2159 kg_f

3.23. 133 m/s

3.27. 0,083 $kg/cm^2/m$

3.31. 0,7 m/s^2

3.32. $Q = A_2\sqrt{2gh_1}$ se $A_2 \ll A_1$ e $h_2 < \dfrac{p_{atm}}{\rho g}$

3.33. $-\rho U^2 h/6$

3.34. $D = -0{,}63\rho U^2 D$

3.35. 76,5 giri/min

3.36. $\omega = \sqrt{p_0/x_0 \rho H}$; p_0 è la pressione atmosferica.

CAPITOLO 4

4.11. Portanza = 975 kg

4.12. $f = 0{,}028$. Caduta di pressione per kilometro = 7,4 kg/cm² = 92 m d'olio = 74 m d'acqua (peso specifico dell'olio = 0,8).

4.14. $C_D = 0{,}18$. $D = 9$ kg, la stessa della prova su modello.

4.18. I gruppi adimensionali sono $\rho DV/\mu$ e $\omega D/V$

4.19. Si può aver similitudine per il gruppo $\omega D/V$ ma non per il $\rho DV/\mu$, che è comunque meno importante.

4.20. Una similitudine basata sul numero di Froude richiede una $V_m = \sqrt{20}$ mph = $\sqrt{12{,}5}$ km/h, ed è indipendente dalla viscosità del fluido. Una similitudine basata sul numero di Reynolds qui non è pratica: per una V_m diciamo di 5 mph dovremmo avere una $\nu = 1{,}36 \times 10^{-7}$, e un simile liquido non esiste.

4.22. Rendimento = 57%, $Q = 3{,}8$ m³/s, $H = 27{,}4$ m, potenza = 6160 CV.

4.24. −11,5 °C

CAPITOLO 5

5.13. 0,77 cm

5.14. 0,0074 kg_f/m^2

5.15. 0,057 kg; 0,000705

5.19. $1{,}29(UL/\nu)^{-1/2}$

5.22. $\dfrac{0{,}075\, h^2 V_1^2}{[h - 0{,}1\sqrt{x}/8]^3 \sqrt{x}}$; 10 m/s²

5.23. $\rho U^2/12$

5.24. $p - p_{\text{ingresso}} = -0{,}07\,(10)^{-3}$ kg/cm²

5.26. 0,50 kg/m

5.27. $p - p_{\text{ingresso}} = -0{,}47\,(10)^{-3}$ kg/cm²

5.28. 1,6 kg_f

5.31. 0,21 kg_f

5.32. 0,0745 CV

5.33. $\mu = 5{,}62\,(10)^{-4}$ $kg_f\ s/m^2$

5.34. 7270 giri/min

5.35. $\pi\mu(\omega_1 - \omega_2)(R_2^4 - R_1^4)/2T_{\text{in}}$

5.36. 0,34 m/s

5.37. 7 m

5.38. 7,2 m/s

5.40. 0,4 m³/s

5.41. 0,0065 kg/cm²

5.42. 0,0152 kg/cm²

5.43. $T = \dfrac{A}{a}\sqrt{\dfrac{2}{g}}[\sqrt{h_0 + h_1} - \sqrt{h_0}]$

5.46. $F = \dfrac{\pi D L \mu V}{h}\left[1 + \dfrac{3}{h^2}\left(\dfrac{d^2}{4} - h^2\right)\right] \approx \frac{3}{4}(d/h)^3 \pi L \mu V$ in cui $h = \dfrac{D_c - D}{2}$

CAPITOLO 6

6.13. 39,6 kg_f/m

6.16. Forza $= 2m^2\rho \displaystyle\int_0^\infty \frac{(x^2 - a^2)^2}{(x^2 + a^2)^4} dx = \frac{3\pi m^2 \rho}{16 a^3}$

6.17. Forza $= \dfrac{m^2\rho}{a^3}\left(\dfrac{3\pi}{16}\cos^2\alpha + \dfrac{\pi}{4}\sin^2\alpha - \dfrac{1}{3}\sin 2\alpha\right)$

6.18. Nessuna differenza: F dipende da m^2.

6.20. $F = -m \ln(\sinh \pi z/2d)$

6.21. $\phi = A(x^2 - y^2)$, $\psi = (A)(2xy)$

6.23. $F = -\dfrac{Q}{2\pi}\ln(\sinh \pi z/d) - U_0 z$

6.24. $F = \dfrac{i\Gamma}{2\pi}\ln\left(\dfrac{z - id}{z + id}\right)$, le linee di corrente sono una famiglia di cerchi.

6.31. $u - iv = -\dfrac{Q}{2\pi}\left[\dfrac{z - (b + ia)}{z - (b - ia)} + \dfrac{z + (b - ia)}{z - (b + ia)} + \dfrac{z + (b + ia)}{z + (b - ia)} + \dfrac{z + (b - ia)}{z + (b + ia)}\right]$

6.32. $F = -\dfrac{Q}{2\pi}\ln\left\{\displaystyle\prod_{n=0}^{7}[z - ae^{i(\pi/4)(1/2+n)}]\right\}$

6.34. $ry = \Gamma^2/4\pi^2 g$, in cui y è misurata verso il basso a partire dal livello della superficie libera all'infinito, fino alla superficie libera corrispondente ad r.

CAPITOLO 7

7.26. 1487 m/s

7.27. 0,313; 1,11

7.28. 0,182

7.29. 1,13 kg/cm²

7.30. 5,10 kg/cm²; 99,6 kcal/kg; 658 °C

7.31. 2,4 cm²

7.32. 8,21 kg_m/s

7.33. (*a*) 0,00075 m²; 0,00129 m². (*b*) 2,01

7.34. 0,101 kg/s; 485 m/s

7.35. 365 m/s

CAPITOLO 8

8.6. $M_2 = 2{,}6$; $T_2 = 212$ K; $p_2 = 0{,}39$ kg/cm²

8.7. $M_2 = 1{,}45$; $T_2 = 355$ K; $p_2 = 2{,}2$ kg/cm²

8.8. $\beta = 15°$ (inferiore); $\beta = 19{,}5°$ (superiore)

8.9. $M_2 = 2{,}6$; $T_2 = 243$; $p_2 = 0{,}28$ kg/cm²

8.10. $D_2 = 0{,}68 D_1$

8.11. $D_2 = 1{,}75 D_1$

8.13. Per la semilunghezza d'onda n-ma, $\dfrac{\Delta p}{p_1} = \dfrac{(-1)^n \epsilon}{\lambda\sqrt{M_1^2 - 1}}$

8.14. $L = 1{,}03\, c p_1$ per unità di lunghezza (teoria delle onde di espansione e urto)

8.15. $G = \dfrac{c}{2\sqrt{M_1^2 - 1}}$

8.17. $C_L = \dfrac{4\bar{\alpha}}{\sqrt{M_1^2 - 1}}$, $C_D = \dfrac{4}{\sqrt{M_1^2 - 1}}\left[\dfrac{\pi^2}{2}\left(\dfrac{H}{c}\right)^2 + \bar{\alpha}^2 + 2\pi^2\left(\dfrac{Y}{c}\right)^2\right]$

8.20. $|\theta| = 53°$

8.22. Velocità d'urto prima della riflessione = 380 m/s.

Indice analitico

Accelerazione nei fluidi, 14
Accelerometro con tubo a U, 20
Acustiche, onde, 218
Adiabatica, costante di portata in superficie,218
parete, 199
Aerodinamica subsonica, 106, 109, 126
Alfvén, onde di, 212, 216
Ampère, legge di, 206
Analisi dimensionale, 62
Angolo, d'attacco, 125, 126, 165
di freccia, 171
di Mach, 160
Anomalo (turbolento), moto di fluidi non newtoniani, 239
Applicazione conforme, 116
Arco (di onda) d'urto, 194
Atmosfera isoterma, 12
Atomi, frazione in massa degli, 198
Attrito, 3
coefficiente di, 70, 89, 144
coefficiente di perdita per, 90
di ventilazione, 238
nel moto isotermo, 144
per i fluidi pseudoplastici, 237

Bernoulli, equazione di, 34, 107
Bianco d'uovo, 235
Bidimensionale, getto, 191
moto compressibile, in gasdinamica, 156
onda, 191
Bidimensionali, corpi, urto ed espansione, 163
Bilancio, equazione dell'energia, 34
Blasius, soluzione di, 78, 80
teorema di, 121
Brinkman, numero di, 66
Buckingham, equazione di, 237
teorema pi greco di, 63

Calore, 31
di formazione, 196
Calore specifico "congelato", 196
Caratteristiche, 160
metodo delle, 168
Carico, perdita di, 34, 89
Cauchy-Riemann, condizioni di, 110, 115
Centrate, onde di espansione, 145
Centrifuga, pompa, 55
Cilindro circolare, 119, 123
circolazione attorno ad un, 120
coefficienti di resistenza, 86
flusso attorno ad un, 119, 123
portanza sviluppata, 120

Circolazione, 106, 107, 108, 120, 123
attorno a un cilindro, 120
Circuito, aperto, tensione, 214
equivalente, 214, 215
Classificazione dei moti, 9
Coefficiente, di perdite per attrito, 90
di portanza, 84
di pressione, 164
di resistenza, 84, 85
di trasporto, 195, 202
di viscosità, 41
Colpo d'ariete, 68
Complessa, velocità, 116
Complesse, teoria delle variabili, 106
Complesso, numero, 115
potenziale, 115, 117
Compressibile, moto, 5
bidimensionale, gasdinamica, 156
monodimensionale, 136
parametri, 65
senza attrito, 156
senza attrito, in magnetoidrodinamica, 221
Compressibilità di un liquido, 1
Compressione supersonica, 162
Condizioni al contorno elettromagnetiche, 208
Conformi, trasformazioni, 106
Conservazione dell'energia, 26
Conservazione della massa, 26, 27
equazione di continuità, 36
Conservazione della specie, equazione di, 196, 198
Contatto, superficie di, 163
Continuità, equazione di, (conservazione della massa)
forma differenziale, 36
nel moto turbolento, 180
Continuo, 2, 26
Controllo, volume di, 27
Convergente, corrente in ugello, 139
Convergente-divergente, ugello, 140
Convezione libera, 66
Coordinate, euleriane, 35
lagrangiane, 35
Corpi sommersi, forze agenti su, 13
Corpo plastico di Bingham, 231, 232, 237
suo scorrimento in un tubo, 237
Correlazioni di velocità, in un punto, 183
tra due punti, 183
Corrente, di corto circuito, 214
esterna, 7, 77
Costitutive, equazioni, 206
Couette, moto, 98
Covarianti, equazioni, 206

Finito di stampare nel mese di marzo 1985 dalla Milanostampa - Farigliano (CN)
per conto del Gruppo Editoriale Fabbri, Bompiani, Sonzogno, Etas S.p.A.,
Via Mecenate, 91 - 20138 Milano

Volumi pubblicati:

1. Ayres, CALCOLO DIFFERENZIALE E INTEGRALE
2. Edminister, CIRCUITI ELETTRICI
3. Ayres, EQUAZIONI DIFFERENZIALI
4. Spiegel, STATISTICA
5. Rosenberg, CHIMICA GENERALE
6. Spiegel, MECCANICA RAZIONALE
7. Di Stefano-Stubberud-Williams, REGOLAZIONE AUTOMATICA
8. Spiegel, ANALISI MATEMATICA
9. Ayres, MATRICI
10. Spiegel, MANUALE DI MATEMATICA
11. Lowenberg, CIRCUITI ELETTRONICI
12. Mendelson, ALGEBRA DI BOOLE E CIRCUITI DI COMMUTAZIONE
13. Spiegel, ANALISI VETTORIALE
14. Scheid, ANALISI NUMERICA
15. Spiegel, VARIABILI COMPLESSE
16. Lipschutz, CALCOLO DELLE PROBABILITA'
17. Abbott-Van Ness, TERMODINAMICA
18. Lipschutz, ALGEBRA LINEARE
19. Hughes-Gaylord, EQUAZIONI PER L'INGEGNERIA
20. McLean-Nelson, MECCANICA APPLICATA
21. Cashin-Lerner, RAGIONERIA 1
22. Seto, SISTEMI VIBRANTI
23. Stansfield, GENETICA
24. Giles, MECCANICA DEI FLUIDI E IDRAULICA
25. Tuma, ANALISI DELLE STRUTTURE
26. Spiegel, ANALISI DI FOURIER
27. Spiegel, TRASFORMATE DI LAPLACE
28. Nash, RESISTENZA DEI MATERIALI
29. Mase, MECCANICA DEI CONTINUI
30. Salvatore, MICROECONOMIA
31. Ayres, MATEMATICA GENERALE
32. Diulio, MACROECONOMIA
33. Van der Merwe, FISICA GENERALE
34. Hecht, OTTICA
35. Cashin-Lerner, RAGIONERIA 2
36. Seto, ACUSTICA
37. Hall-Holowenko-Laughlin, COSTRUZIONE DI MACCHINE
38. Hughes-Brighton, FLUIDODINAMICA
39. Lipschutz, TOPOLOGIA
40. Spiegel, PROBABILITA' E STATISTICA
41. Metz, CHIMICA FISICA
42. Lipschutz, TEORIA DEGLI INSIEMI
43. Gottfried, PROGRAMMARE IN BASIC
44. Meislich-Nechamkin-Sharefkin, CHIMICA ORGANICA
45. Lipschutz-Poe, PROGRAMMARE IN FORTRAN
46. Ayres, ALGEBRA MODERNA
47. Spiegel, DIFFERENZE FINITE ED EQUAZIONI ALLE DIFFERENZE
48. Edminister, ELETTROMAGNETISMO
49. Temes, COMUNICAZIONI ELETTRONICHE
50. Gautreau-Savin, FISICA MODERNA
51. Nasar, MACCHINE ELETTRICHE
52. Pitts-Sissom, TRASMISSIONE DEL CALORE
53. Beiser, SCIENZE DELLA TERRA
54. Lipschutz-Lipschutz, ELABORAZIONE DEI DATI
55. Dowling, MATEMATICA PER ECONOMISTI
56. Gottfried, INTRODUZIONE AI CALCOLI DI INGEGNERIA
57. Baumslag-Chandler, TEORIA DEI GRUPPI
58. Bronson, MODERNA INTRODUZIONE ALLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI
59. Kaufman-Wilson, TECNOLOGIA ELETTRONICA
60. Bronson, RICERCA OPERATIVA
61 Lipschutz, MATEMATICA DI BASE PER IL CALCOLATORE
62. Wells, DINAMICA LAGRANGIANA
63. O'Malley, FONDAMENTI DI ANALISI DEI CIRCUITI
64. Lipschutz, GEOMETRIA DIFFERENZIALE
65. Scheid, IL CALCOLATORE E LA PROGRAMMAZIONE
66. Holtje, MARKETING
67. Tokheim, MICROPROCESSORI

289918

GRUPPO EDITORIALE FABBRI, BOMPIANI, SONZOGNO, ETAS

L. 22.000
IVA compresa